Ekstremal Çizge Kuramından Problemler

Lale Özkahya

12 Aralık 2014
Hacettepe Üniversitesi

Uygulamadan Örnekler

- Maksimum Eşleştirmeyi Bulma Problemi (Allocation Problem)
- Komşu olan köşeleri farklı Renklendirme Problemi (Frequency Assignment Problem in Networks)
- 4-renk problemi (Her harita komşu ülkeler farklı renk sahibi olacak şekilde dört farklı renkle boyanabilir.)
- Maksimum klik ve büyüklüğünü bulma (Data mining, informatics)
- Maks. akış - Min. kesit problemi (Image segmentation)
- Çizge ve hiperçizgeleri minimum sayıda parça kullanarak parçalama (Parallel Computing)
- En küçük kapsayıcı set (cover) bulma (computational geometry)

İçerik listesi

Mantel teoremi ve ispatı

ex(n,P), P için Turán sayısı: P'yi altçizge olarak bulundurmayan n köşeli bir çizgenin sahip olabileceği maksimum kenar sayısı.

Mantel teoremi ve ispatı

ex(n,P), P için Turán sayısı: P'yi altçizge olarak bulundurmayan n köşeli bir çizgenin sahip olabileceği maksimum kenar sayısı.
(Mantel, 1907): $\mathrm{ex}(n, K_3) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
G, K_3'ü altçizge olarak bulundurmasın.
$V(G) = \{1, \ldots, n\}$

Mantel teoremi ve ispatı

ex(n,P), P için Turán sayısı: P'yi altçizge olarak bulundurmayan n köşeli bir çizgenin sahip olabileceği maksimum kenar sayısı.
(Mantel, 1907): $\mathrm{ex}(n, K_3) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
G, K_3'ü altçizge olarak bulundurmasın.
$V(G) = \{1, \ldots, n\}$
d_i: i köşesinin derecesi (i'nin G çizgesindeki komşu sayısı)

Mantel teoremi ve ispatı

ex(n,P), P için Turán sayısı: P'yi altçizge olarak bulundurmayan n köşeli bir çizgenin sahip olabileceği maksimum kenar sayısı.

(Mantel, 1907): $\mathrm{ex}(n, K_3) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

G, K_3'ü altçizge olarak bulundurmasın.

$V(G) = \{1, \ldots, n\}$

d_i: i köşesinin derecesi (i'nin G çizgesindeki komşu sayısı)

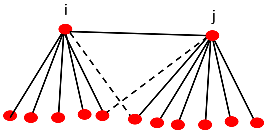
$$\sum_{i \in V(G)} d_i = 2|E(G)|$$

ex(n,P), P için Turán sayısı: P'yi altçizge olarak bulundurmayan n köşeli bir çizgenin sahip olabileceği maksimum kenar sayısı.
(Mantel, 1907): $\mathrm{ex}(n, K_3) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil$.
G, K_3'ü altçizge olarak bulundurmasın.
$V(G) = \{1, \ldots, n\}$
d_i: i köşesinin derecesi (i'nin G çizgesindeki komşu sayısı)

$$\sum_{i \in V(G)} d_i = 2|E(G)|$$

Gözlem 1: $d_i + d_j \leq n$, tüm $ij \in E(G)$ için

$$\sum_{ij \in E(G)} (d_i + d_j) \leq n|E(G)|$$



Mantel'in $\mathrm{ex}(n, K_3)$ için ispatı

Gözlem 2: Her i için, d_i tam olarak d_i defa toplandığı için,

$$n|E(G)| \geq \sum_{ij \in E(G)} (d_i + d_j) = \sum_{i \in V(G)} d_i^2$$

Mantel'in $\mathrm{ex}(n, K_3)$ için ispatı

Gözlem 2: Her i için, d_i tam olarak d_i defa toplandığı için,

$$n|E(G)| \geq \sum_{ij \in E(G)} (d_i + d_j) = \sum_{i \in V(G)} d_i^2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >$ *herhangi iki vektörün içsel çarpımı ve herhangi bir* $\mathbf{x}$ *vektörünün normu* $|x|^2 := <\mathbf{x}, \mathbf{x}>$ *olsun. Bu durumda*

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >^2 \leq < \mathbf{a}, \mathbf{a} >< \mathbf{b}, \mathbf{b} >= |a|^2 |b|^2.$$

Mantel'in $\mathrm{ex}(n, K_3)$ için ispatı

Gözlem 2: Her i için, d_i tam olarak d_i defa toplandığı için,

$$n|E(G)| \geq \sum_{ij \in E(G)} (d_i + d_j) = \sum_{i \in V(G)} d_i^2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >$ herhangi iki vektörün içsel çarpımı ve herhangi bir $\mathbf{x}$ vektörünün normu $|x|^2 := <\mathbf{x},\mathbf{x}>$ olsun. Bu durumda

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >^2 \leq < \mathbf{a}, \mathbf{a} >< \mathbf{b}, \mathbf{b} >= |a|^2 |b|^2.$$

Örneğin, eğer $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ *ve* $\mathbf{b} = (3, 0, 4)$ *ise, o zaman*

$$(1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4)^2 = 225 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(3^2 + 0^2 + 4^2) = 350.$$

Mantel'in $\mathrm{ex}(n, K_3)$ için ispatı

Gözlem 2: Her i için, d_i tam olarak d_i defa toplandığı için,

$$n|E(G)| \geq \sum_{ij \in E(G)} (d_i + d_j) = \sum_{i \in V(G)} d_i^2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >$ *herhangi iki vektörün içsel çarpımı ve herhangi bir* $\mathbf{x}$ *vektörünün normu* $|x|^2 := <\mathbf{x},\mathbf{x}>$ *olsun. Bu durumda*

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >^2 \leq < \mathbf{a}, \mathbf{a} >< \mathbf{b}, \mathbf{b} >= |a|^2 |b|^2.$$

Örneğin, eğer $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ *ve* $\mathbf{b} = (3, 0, 4)$ *ise, o zaman*

$$(1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4)^2 = 225 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(3^2 + 0^2 + 4^2) = 350.$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini $(d_1, \ldots, d_n)$ and $(1, \ldots, 1)$ vektörlerine uygulayarak,

$$\frac{4e(G)^2}{n} \overset{\text{tanım}}{=} \frac{(\sum d_i)^2}{n}$$

Mantel'in $\mathrm{ex}(n, K_3)$ için ispatı

Gözlem 2: Her i için, d_i tam olarak d_i defa toplandığı için,

$$n|E(G)| \geq \sum_{ij \in E(G)} (d_i + d_j) = \sum_{i \in V(G)} d_i^2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$<\mathbf{a}, \mathbf{b}>$ herhangi iki vektörün içsel çarpımı ve herhangi bir $\mathbf{x}$ vektörünün normu $|x|^2 := <\mathbf{x},\mathbf{x}>$ olsun. Bu durumda

$$<\mathbf{a}, \mathbf{b}>^2 \leq <\mathbf{a}, \mathbf{a}><\mathbf{b}, \mathbf{b}> = |a|^2 |b|^2.$$

Örneğin, eğer $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ *ve* $\mathbf{b} = (3, 0, 4)$ *ise, o zaman*

$$(1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4)^2 = 225 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(3^2 + 0^2 + 4^2) = 350.$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini $(d_1, \ldots, d_n)$ and $(1, \ldots, 1)$ vektörlerine uygulayarak,

$$\frac{4e(G)^2}{n} \overset{\text{tanım}}{=} \frac{(\sum d_i)^2}{n} \overset{\text{C-S}}{\leq} \sum_{i \in V(G)} d_i^2$$

Mantel'in $\mathrm{ex}(n, K_3)$ için ispatı

Gözlem 2: Her i için, d_i tam olarak d_i defa toplandığı için,

$$n|E(G)| \geq \sum_{ij \in E(G)} (d_i + d_j) = \sum_{i \in V(G)} d_i^2$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >$ herhangi iki vektörün içsel çarpımı ve herhangi bir $\mathbf{x}$ vektörünün normu $|x|^2 := <\mathbf{x},\mathbf{x}>$ olsun. Bu durumda

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >^2 \leq < \mathbf{a}, \mathbf{a} >< \mathbf{b}, \mathbf{b} >= |a|^2 |b|^2.$$

Örneğin, eğer $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ ve $\mathbf{b} = (3, 0, 4)$ ise, o zaman

$$(1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4)^2 = 225 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(3^2 + 0^2 + 4^2) = 350.$$

Cauchy-Schwarz eşitsizliğini $(d_1, \ldots, d_n)$ and $(1, \ldots, 1)$ vektörlerine uygulayarak,

$$\frac{4e(G)^2}{n} \overset{\text{tanım}}{=} \frac{(\sum d_i)^2}{n} \overset{\text{C-S}}{\leq} \sum_{i \in V(G)} d_i^2 \overset{\text{Göz. 2}}{\leq} ne(G)$$

İçerik listesi

Tek sayılı kümelerin çift elemanda kesişmesi

Teorem (Berlekamp, 1969; Graver, 1975)

Yaşayanlarının sayısı n olan bir kasaba olsun ve öyle kulüpleri olsun ki:

- *her kulübün üye sayısı bir tek sayı olsun,*
- *her iki kulübün ortak üye sayısı bir çift sayı olsun.*

Bu durumda maksimum kulüp sayısı n'dir.

Tek sayılı kümelerin çift elemanda kesişmesi

Teorem (Berlekamp, 1969; Graver, 1975)

Yaşayanlarının sayısı n olan bir kasaba olsun ve öyle kulüpleri olsun ki:

- *her kulübün üye sayısı bir tek sayı olsun,*
- *her iki kulübün ortak üye sayısı bir çift sayı olsun.*

Bu durumda maksimum kulüp sayısı n'dir.

n'nin sağlandığı durum:
Her kişi bir kulüp olsun, en az n kulüp olur.

Tek sayılı kümelerin çift elemanda kesişmesi

Teorem (Berlekamp, 1969; Graver, 1975)

Yaşayanlarının sayısı n olan bir kasaba olsun ve öyle kulüpleri olsun ki:

- *her kulübün üye sayısı bir tek sayı olsun,*
- *her iki kulübün ortak üye sayısı bir çift sayı olsun.*

Bu durumda maksimum kulüp sayısı n'dir.

n'nin sağlandığı durum:
Her kişi bir kulüp olsun, en az n kulüp olur.

Üst sınır:

- Kulüpler $\{A_1, \ldots, A_m\}$ olarak m tek üyeli kulüp olsun ve her i, j için $|A_i \cap A_j|$ çift bir sayı olsun.
- m en fazla kaç olabilir?
- Her X kulübü için karakteristik vektör $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ tanımlı olsun:

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{if } \; i \notin X \\ 1 & \text{if } \; i \in X. \end{cases}$$

Tek sayılı kümelerin çift elemanda kesişmesi

Üst sınır (devam):

- $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, $A_1, \ldots, A_m$ setlerinin karakteristik vektörleri olsun ve bu vektörleri $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde tanımlı $V = \mathbb{Z}_2^n$ vektör uzayının elemanları olarak düşünelim.

Tek sayılı kümelerin çift elemanda kesişmesi

Üst sınır (devam):

- $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, $A_1, \ldots, A_m$ setlerinin karakteristik vektörleri olsun ve bu vektörleri $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde tanımlı $V = \mathbb{Z}_2^n$ vektör uzayının elemanları olarak düşünelim.
- Gözlem: Her i ve j için, $< \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j >= 0$ ve her $\mathbf{a}_i$ vektörünün tek sayıda hanesi 1'e eşit.

Üst sınır (devam):

- $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, $A_1, \ldots, A_m$ setlerinin karakteristik vektörleri olsun ve bu vektörleri $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde tanımlı $V = \mathbb{Z}_2^n$ vektör uzayının elemanları olarak düşünelim.
- Gözlem: Her i ve j için, $< \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j >= 0$ ve her $\mathbf{a}_i$ vektörünün tek sayıda hanesi 1'e eşit.
- Sonuç: $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ vektörleri lineer bağımsız bir kümedir.

Aksi halde, $\mathbf{a}_i = \sum_{j \in J} \mathbf{a}_j$ herhangi bir $\mathbf{a}_i$ ve J için doğru ise,

$$1 \equiv < \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i > \equiv \left\langle \mathbf{a}_i, \sum_{j \in J} \mathbf{a}_j \right\rangle$$

Tek sayılı kümelerin çift elemanda kesişmesi

Üst sınır (devam):

- $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, $A_1, \ldots, A_m$ setlerinin karakteristik vektörleri olsun ve bu vektörleri $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde tanımlı $V = \mathbb{Z}_2^n$ vektör uzayının elemanları olarak düşünelim.
- Gözlem: Her i ve j için, $< \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j >= 0$ ve her $\mathbf{a}_i$ vektörünün tek sayıda hanesi 1'e eşit.
- Sonuç: $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ vektörleri lineer bağımsız bir kümedir.

Aksi halde, $\mathbf{a}_i = \sum_{j \in J} \mathbf{a}_j$ herhangi bir $\mathbf{a}_i$ ve J için doğru ise,

$$1 \equiv < \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i > \equiv \left\langle \mathbf{a}_i, \sum_{j \in J} \mathbf{a}_j \right\rangle \equiv \sum_{j \in J} < \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j >$$

Üst sınır (devam):

- $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, $A_1, \ldots, A_m$ setlerinin karakteristik vektörleri olsun ve bu vektörleri $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde tanımlı $V = \mathbb{Z}_2^n$ vektör uzayının elemanları olarak düşünelim.
- Gözlem: Her i ve j için, $< \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j >= 0$ ve her $\mathbf{a}_i$ vektörünün tek sayıda hanesi 1'e eşit.
- Sonuç: $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ vektörleri lineer bağımsız bir kümedir.

Aksi halde, $\mathbf{a}_i = \sum_{j \in J} \mathbf{a}_j$ herhangi bir $\mathbf{a}_i$ ve J için doğru ise,

$$1 \equiv < \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i > \equiv \left\langle \mathbf{a}_i, \sum_{j \in J} \mathbf{a}_j \right\rangle \equiv \sum_{j \in J} < \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j > \equiv \sum_{j \in J} 0 \equiv 0$$

Tek sayılı kümelerin çift elemanda kesişmesi

Üst sınır (devam):

- $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, $A_1, \ldots, A_m$ setlerinin karakteristik vektörleri olsun ve bu vektörleri $\mathbb{Z}_2$ cismi üzerinde tanımlı $V = \mathbb{Z}_2^n$ vektör uzayının elemanları olarak düşünelim.
- Gözlem: Her i ve j için, $< \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j >= 0$ ve her $\mathbf{a}_i$ vektörünün tek sayıda hanesi 1'e eşit.
- Sonuç: $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ vektörleri lineer bağımsız bir kümedir.

Aksi halde, $\mathbf{a}_i = \sum_{j \in J} \mathbf{a}_j$ herhangi bir $\mathbf{a}_i$ ve J için doğru ise,

$$1 \equiv < \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i > \equiv \left\langle \mathbf{a}_i, \sum_{j \in J} \mathbf{a}_j \right\rangle \equiv \sum_{j \in J} < \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j > \equiv \sum_{j \in J} 0 \equiv 0$$

$$m \leq n$$

İçerik listesi

$\mathrm{ex}(n, C_{2k})$'nin alt sınırı için rastgele inşa

Theorem: For any $k \geq 2$, there exists a constant c such that

$$\mathrm{ex}(n, C_{2k}) \geq cn^{2-\frac{2k-2}{2k-1}} = cn^{1+\frac{1}{2k-1}}.$$

$\mathrm{ex}(n, C_{2k})$'nin alt sınırı için rastgele inşa

Theorem: For any $k \geq 2$, there exists a constant c such that

$$\mathrm{ex}(n, C_{2k}) \geq cn^{2-\frac{2k-2}{2k-1}} = cn^{1+\frac{1}{2k-1}}.$$

İspat: Rastgele çizgedeki her kenar p olasılığıyla seçilsin$p = \frac{1}{2}n^{-\frac{2k-2}{2k-1}}$.

$\mathrm{ex}(n, C_{2k})$'nin alt sınırı için rastgele inşa

Theorem: For any $k \geq 2$, there exists a constant c such that

$$\mathrm{ex}(n, C_{2k}) \geq cn^{2-\frac{2k-2}{2k-1}} = cn^{1+\frac{1}{2k-1}}.$$

İspat: Rastgele çizgedeki her kenar p olasılığıyla seçilsin$p = \frac{1}{2}n^{-\frac{2k-2}{2k-1}}$.

C_{2k} döngülerinin beklentisi $p^{2k}\binom{n}{2k} \leq p^{2k}n^{2k}$.
Demektir ki,
eğer J, C_{2k}'leri sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(J) \leq p^{2k}n^{2k}$.

$\mathrm{ex}(n, C_{2k})$'nin alt sınırı için rastgele inşa

Theorem: For any $k \geq 2$, there exists a constant c such that

$$\mathrm{ex}(n, C_{2k}) \geq cn^{2-\frac{2k-2}{2k-1}} = cn^{1+\frac{1}{2k-1}}.$$

İspat: Rastgele çizgedeki her kenar p olasılığıyla seçilsin$p = \frac{1}{2}n^{-\frac{2k-2}{2k-1}}$.

C_{2k} döngülerinin beklentisi $p^{2k}\binom{n}{2k} \leq p^{2k}n^{2k}$.
Demektir ki,
eğer J, C_{2k}'leri sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(J) \leq p^{2k}n^{2k}$.

Beklenen kenar sayısı $p\binom{n}{2} \geq \frac{1}{4}pn^2$.
Demektir ki,
eğer I, kenarları sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(I) \geq \frac{1}{4}pn^2$.

$\mathrm{ex}(n, C_{2k})$'nin alt sınırı için rastgele inşa

Theorem: For any $k \geq 2$, there exists a constant c such that

$$\mathrm{ex}(n, C_{2k}) \geq cn^{2-\frac{2k-2}{2k-1}} = cn^{1+\frac{1}{2k-1}}.$$

İspat: Rastgele çizgedeki her kenar p olasılığıyla seçilsin$p = \frac{1}{2}n^{-\frac{2k-2}{2k-1}}$.

C_{2k} döngülerinin beklentisi $p^{2k}\binom{n}{2k} \leq p^{2k}n^{2k}$.
Demektir ki,
eğer J, C_{2k}'leri sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(J) \leq p^{2k}n^{2k}$.

Beklenen kenar sayısı $p\binom{n}{2} \geq \frac{1}{4}pn^2$.
Demektir ki,
eğer I, kenarları sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(I) \geq \frac{1}{4}pn^2$.

$$\mathbb{E}(I - J) =$$

$\mathrm{ex}(n, C_{2k})$'nin alt sınırı için rastgele inşa

Theorem: For any $k \geq 2$, there exists a constant c such that

$$\mathrm{ex}(n, C_{2k}) \geq cn^{2-\frac{2k-2}{2k-1}} = cn^{1+\frac{1}{2k-1}}.$$

İspat: Rastgele çizgedeki her kenar p olasılığıyla seçilsin$p = \frac{1}{2} n^{-\frac{2k-2}{2k-1}}$.

C_{2k} döngülerinin beklentisi $p^{2k}\binom{n}{2k} \leq p^{2k} n^{2k}$.
Demektir ki,
eğer J, C_{2k}'leri sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(J) \leq p^{2k} n^{2k}$.

Beklenen kenar sayısı $p\binom{n}{2} \geq \frac{1}{4} pn^2$.
Demektir ki,
eğer I, kenarları sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(I) \geq \frac{1}{4} pn^2$.

$$\mathbb{E}(I - J) = \mathbb{E}(I) - \mathbb{E}(J)$$

Theorem: For any $k \geq 2$, there exists a constant c such that

$$\mathrm{ex}(n, C_{2k}) \geq cn^{2-\frac{2k-2}{2k-1}} = cn^{1+\frac{1}{2k-1}}.$$

İspat: Rastgele çizgedeki her kenar p olasılığıyla seçilsin$p = \frac{1}{2}n^{-\frac{2k-2}{2k-1}}$.

C_{2k} döngülerinin beklentisi $p^{2k}\binom{n}{2k} \leq p^{2k}n^{2k}$.
Demektir ki,
eğer J, C_{2k}'leri sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(J) \leq p^{2k}n^{2k}$.

Beklenen kenar sayısı $p\binom{n}{2} \geq \frac{1}{4}pn^2$.
Demektir ki,
eğer I, kenarları sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(I) \geq \frac{1}{4}pn^2$.

$$\mathbb{E}(I - J) = \mathbb{E}(I) - \mathbb{E}(J) \geq \frac{1}{4}pn^2 - p^{2k}n^{2k}$$

$\mathrm{ex}(n, C_{2k})$'nin alt sınırı için rastgele inşa

Theorem: For any $k \geq 2$, there exists a constant c such that

$$\mathrm{ex}(n, C_{2k}) \geq cn^{2-\frac{2k-2}{2k-1}} = cn^{1+\frac{1}{2k-1}}.$$

İspat: Rastgele çizgedeki her kenar p olasılığıyla seçilsin$p = \frac{1}{2}n^{-\frac{2k-2}{2k-1}}$.

C_{2k} döngülerinin beklentisi $p^{2k}\binom{n}{2k} \leq p^{2k}n^{2k}$.
Demektir ki,
eğer J, C_{2k}'leri sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(J) \leq p^{2k}n^{2k}$.

Beklenen kenar sayısı $p\binom{n}{2} \geq \frac{1}{4}pn^2$.
Demektir ki,
eğer I, kenarları sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(I) \geq \frac{1}{4}pn^2$.

$$\mathbb{E}(I - J) = \mathbb{E}(I) - \mathbb{E}(J) \geq \frac{1}{4}pn^2 - p^{2k}n^{2k} \geq \frac{1}{8}pn^2$$

$\mathrm{ex}(n, C_{2k})$'nin alt sınırı için rastgele inşa

Theorem: For any $k \geq 2$, there exists a constant c such that

$$\mathrm{ex}(n, C_{2k}) \geq cn^{2-\frac{2k-2}{2k-1}} = cn^{1+\frac{1}{2k-1}}.$$

İspat: Rastgele çizgedeki her kenar p olasılığıyla seçilsin$p = \frac{1}{2}n^{-\frac{2k-2}{2k-1}}$.

C_{2k} döngülerinin beklentisi $p^{2k}\binom{n}{2k} \leq p^{2k}n^{2k}$.
Demektir ki,
eğer J, C_{2k}'leri sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(J) \leq p^{2k}n^{2k}$.

Beklenen kenar sayısı $p\binom{n}{2} \geq \frac{1}{4}pn^2$.
Demektir ki,
eğer I, kenarları sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(I) \geq \frac{1}{4}pn^2$.

$$\mathbb{E}(I - J) = \mathbb{E}(I) - \mathbb{E}(J) \geq \frac{1}{4}pn^2 - p^{2k}n^{2k} \geq \frac{1}{8}pn^2 = \frac{1}{16}n^{2-\frac{2k-2}{2k-1}}.$$

$\mathrm{ex}(n, C_{2k})$'nin alt sınırı için rastgele inşa

Theorem: For any $k \geq 2$, there exists a constant c such that

$$\mathrm{ex}(n, C_{2k}) \geq cn^{2-\frac{2k-2}{2k-1}} = cn^{1+\frac{1}{2k-1}}.$$

İspat: Rastgele çizgedeki her kenar p olasılığıyla seçilsin$p = \frac{1}{2}n^{-\frac{2k-2}{2k-1}}$.

C_{2k} döngülerinin beklentisi $p^{2k}\binom{n}{2k} \leq p^{2k}n^{2k}$.
Demektir ki,
eğer J, C_{2k}'leri sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(J) \leq p^{2k}n^{2k}$.

Beklenen kenar sayısı $p\binom{n}{2} \geq \frac{1}{4}pn^2$.
Demektir ki,
eğer I, kenarları sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(I) \geq \frac{1}{4}pn^2$.

$$\mathbb{E}(I-J) = \mathbb{E}(I) - \mathbb{E}(J) \geq \frac{1}{4}pn^2 - p^{2k}n^{2k} \geq \frac{1}{8}pn^2 = \frac{1}{16}n^{2-\frac{2k-2}{2k-1}}.$$

Bu sebeple, öyle bir G çizgesi vardır ki, $I - J \geq \frac{1}{16}n^{2-\frac{2k-2}{2k-1}}$ durumunu sağlar.

$\mathrm{ex}(n, C_{2k})$'nin alt sınırı için rastgele inşa

Theorem: For any $k \geq 2$, there exists a constant c such that

$$\mathrm{ex}(n, C_{2k}) \geq cn^{2-\frac{2k-2}{2k-1}} = cn^{1+\frac{1}{2k-1}}.$$

İspat: Rastgele çizgedeki her kenar p olasılığıyla seçilsin$p = \frac{1}{2}n^{-\frac{2k-2}{2k-1}}$.

C_{2k} döngülerinin beklentisi $p^{2k}\binom{n}{2k} \leq p^{2k}n^{2k}$.
Demektir ki,
eğer J, C_{2k}'leri sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(J) \leq p^{2k}n^{2k}$.

Beklenen kenar sayısı $p\binom{n}{2} \geq \frac{1}{4}pn^2$.
Demektir ki,
eğer I, kenarları sayan rastgele değişken ise, o zaman $\mathbb{E}(I) \geq \frac{1}{4}pn^2$.

$$\mathbb{E}(I-J) = \mathbb{E}(I) - \mathbb{E}(J) \geq \frac{1}{4}pn^2 - p^{2k}n^{2k} \geq \frac{1}{8}pn^2 = \frac{1}{16}n^{2-\frac{2k-2}{2k-1}}.$$

Bu sebeple, öyle bir G çizgesi vardır ki, $I - J \geq \frac{1}{16}n^{2-\frac{2k-2}{2k-1}}$ durumunu sağlar.
(bu G'deki C_{2k} her kopyasından bir kenar silerek, en az $I - J$ kenarlı ve C_{2k} içermeyen bir altçizge yaratmak mümkün.)

İçerik listesi

$\mathrm{ex}(n, K_{2,2})$'nin alt sınırı için inşası

Teorem (Erdős, Rényi, Sós): $\mathrm{ex}(n, K_{2,2}) \geq \frac{1}{2} n^{3/2} + O(n)$.

$\mathrm{ex}(n, K_{2,2})$'nin alt sınırı için inşası

Teorem (Erdős, Rényi, Sós): $\mathrm{ex}(n, K_{2,2}) \geq \frac{1}{2} n^{3/2} + O(n)$.
İnşa:
p, asal sayı; $n = p^2 - 1$
G çizgesini öyle tanımlayalım ki

$$V(G) := \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \setminus \{0, 0\}$$

ve

$$E(G) = \{(x, y), (a, b) : ax + by = 1\}.$$

$\mathrm{ex}(n, K_{2,2})$'nin alt sınırı için inşası

Teorem (Erdős, Rényi, Sós): $\mathrm{ex}(n, K_{2,2}) \geq \frac{1}{2} n^{3/2} + O(n)$.
İnşa:
p, asal sayı; $n = p^2 - 1$
G çizgesini öyle tanımlayalım ki

$$V(G) := \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \setminus \{0, 0\}$$

ve

$$E(G) = \{(x, y), (a, b) : ax + by = 1\}.$$

kenar kümesinde görülen kenar özellikleri:
- $x = 0$ ise, b için tek ve sıfır olmayan bir çözüm vardir, a her sayı olabilir

$\mathrm{ex}(n, K_{2,2})$'nin alt sınırı için inşası

Teorem (Erdős, Rényi, Sós): $\mathrm{ex}(n, K_{2,2}) \geq \frac{1}{2}n^{3/2} + O(n)$.
İnşa:
p, asal sayı; $n = p^2 - 1$
G çizgesini öyle tanımlayalım ki

$$V(G) := \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \setminus \{0, 0\}$$

ve

$$E(G) = \{(x, y), (a, b) : ax + by = 1\}.$$

kenar kümesinde görülen kenar özellikleri:
- $x = 0$ ise, b için tek ve sıfır olmayan bir çözüm vardir, a her sayı olabilir
- $y = 0$ ise, a için tek ve sıfır olmayan bir çözüm vardir, b her sayı olabilir

Teorem (Erdős, Rényi, Sós): $\mathrm{ex}(n, K_{2,2}) \geq \frac{1}{2}n^{3/2} + O(n)$.
İnşa:
p, asal sayı; $n = p^2 - 1$
G çizgesini öyle tanımlayalım ki

$$V(G) := \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \setminus \{0, 0\}$$

ve

$$E(G) = \{(x, y), (a, b) : ax + by = 1\}.$$

kenar kümesinde görülen kenar özellikleri:
- $x = 0$ ise, b için tek ve sıfır olmayan bir çözüm vardir, a her sayı olabilir
- $y = 0$ ise, a için tek ve sıfır olmayan bir çözüm vardir, b her sayı olabilir
- aksi halde, herhangi bir b sayısı için, a'nın tek değeri vardir: $a = x^{-1}(1 - by)$.

$\mathrm{ex}(n, K_{2,2})$'nin alt sınırı için inşası

Teorem (Erdős, Rényi, Sós): $\mathrm{ex}(n, K_{2,2}) \geq \frac{1}{2} n^{3/2} + O(n)$.
İnşa:
p, asal sayı; $n = p^2 - 1$
G çizgesini öyle tanımlayalım ki

$$V(G) := \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \setminus \{0, 0\}$$

ve

$$E(G) = \{(x, y), (a, b) : ax + by = 1\}.$$

kenar kümesinde görülen kenar özellikleri:
- $x = 0$ ise, b için tek ve sıfır olmayan bir çözüm vardır, a her sayı olabilir
- $y = 0$ ise, a için tek ve sıfır olmayan bir çözüm vardır, b her sayı olabilir
- aksi halde, herhangi bir b sayısı için, a'nın tek değeri vardır: $a = x^{-1}(1 - by)$.

Yukarıdaki özelliklerden dolayı (x, y)'nin en az $p - 1$ komşusu vardır ve

$$e(G) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in V(G)} d((x, y)) \geq \frac{1}{2} \; n(p - 1)$$

$\mathrm{ex}(n, K_{2,2})$'nin alt sınırı için inşası

Teorem (Erdős, Rényi, Sós): $\mathrm{ex}(n, K_{2,2}) \geq \frac{1}{2}n^{3/2} + O(n)$.
İnşa:
p, asal sayı; $n = p^2 - 1$
G çizgesini öyle tanımlayalım ki

$$V(G) := \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \setminus \{0, 0\}$$

ve

$$E(G) = \{(x, y), (a, b) : ax + by = 1\}.$$

kenar kümesinde görülen kenar özellikleri:
- $x = 0$ ise, b için tek ve sıfır olmayan bir çözüm vardir, a her sayı olabilir
- $y = 0$ ise, a için tek ve sıfır olmayan bir çözüm vardir, b her sayı olabilir
- aksi halde, herhangi bir b sayısı için, a'nın tek değeri vardır: $a = x^{-1}(1 - by)$.

Yukarıdaki özelliklerden dolayı (x, y)'nin en az $p - 1$ komşusu vardır ve

$$e(G) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in V(G)} d((x, y)) \geq \frac{1}{2} \ n(p - 1) \approx \frac{1}{2} n^{3/2}.$$

$\mathrm{ex}(n, K_{2,2})$'nin alt sınırı için inşa (devam)

Bu inşadaki G çizgesinde $K_{2,2}$ yoktur: Diyelim ki $(a, b), (u, v), (a', b'), (u', v')$ köşeleriyle bir $K_{2,2}$ altçizgesi olsun.

G'deki komşuluk ilişkilerinin tanımından dolayı , eğer (u, v) ile (u', v')'nin $(x, y) = (a, b)$ ve $(x, y) = (a', b')$ olarak iki farklı komşusu varsa aşağıdaki sistemi sağlıyor:

$$ux + vy = 1 \text{ ve } u'x + v'y = 1$$

$\mathrm{ex}(n, K_{2,2})$'nin alt sınırı için inşa (devam)

Bu inşadaki G çizgesinde $K_{2,2}$ yoktur: Diyelim ki $(a, b), (u, v), (a', b'), (u', v')$ köşeleriyle bir $K_{2,2}$ altçizgesi olsun.

G'deki komşuluk ilişkilerinin tanımından dolayı , eğer (u, v) ile (u', v')'nin $(x, y) = (a, b)$ ve $(x, y) = (a', b')$ olarak iki farklı komşusu varsa aşağıdaki sistemi sağlıyor:

$$ux + vy = 1 \text{ ve } u'x + v'y = 1$$

Ama iki ayrı doğru iki farklı noktada kesişemez,
$K_{2,2}$ olamaz G'de!!!

$\mathrm{ex}(n, K_{3,3})$'nin alt sınırı için inşası

Teorem (Brown): $\mathrm{ex}(n, K_{3,3}) \geq c' n^{5/3}$.

$\mathrm{ex}(n, K_{3,3})$'nin alt sınırı için inşası

Teorem (Brown): $\mathrm{ex}(n, K_{3,3}) \geq c' n^{5/3}$.

İnşa (kısa olarak):
$p \equiv 3 \pmod 4$, asal; $n = p^3$
G çizgesinin öyle tanımlayalım ki

$$V(G) := \mathbb{Z}_p^3$$

ve

$$E(G) = \{(x, y, z), (a, b, c) : (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = 1\}.$$

$\mathrm{ex}(n, K_{3,3})$'nin alt sınırı için inşası

Teorem (Brown): $\mathrm{ex}(n, K_{3,3}) \geq c' n^{5/3}$.

İnşa (kısa olarak):
$p \equiv 3 \pmod 4$, asal; $n = p^3$
G çizgesinin öyle tanımlayalım ki

$$V(G) := \mathbb{Z}_p^3$$

ve

$$E(G) = \{(x, y, z), (a, b, c) : (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = 1\}.$$

kenar kümesinde görülen kenar özelliklerinden dolayı (x, y, z)'nin en az $c'' p^2$ (c'' sabit) komşusu vardır ve

$$e(G) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in V(G)} d((x, y)) \geq \frac{1}{2} \; c'' n p^2$$

$\mathrm{ex}(n, K_{3,3})$'nin alt sınırı için inşası

Teorem (Brown): $\mathrm{ex}(n, K_{3,3}) \geq c' n^{5/3}$.

İnşa (kısa olarak):
$p \equiv 3 \pmod 4$, asal; $n = p^3$
G çizgesinin öyle tanımlayalım ki

$$V(G) := \mathbb{Z}_p^3$$

ve

$$E(G) = \{(x, y, z), (a, b, c) : (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = 1\}.$$

kenar kümesinde görülen kenar özelliklerinden dolayı (x, y, z)'nin en az $c'' p^2$ (c'' sabit) komşusu vardır ve

$$e(G) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in V(G)} d((x, y)) \geq \frac{1}{2} \; c'' n p^2 \approx c' n^{5/3}.$$

Diyelim ki komşu olmayanlar arasinda $(u, v, w), (u', v', w'), (u'', v'', w'')$ köşeleriyle bir $K_{3,3}$ altçizgesi olsun.

Hatırlayacak olursak,

$$E(G) = \{(x, y, z), (a, b, c) : (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = 1\}.$$

G'deki komşuluk ilişkilerinin tanımından dolayı , eğer yukarıdakilerin $(x, y, z) = (a, b, c)$, $(x, y, z) = (a', b', c')$ ve $(x, y, z) = (a'', b'', c'')$ olarak üç farklı komşusu varsa aşağıdaki sistemi sağlıyor:

$$(u - x)^2 + (v - y)^2 + (w - z)^2 = 1$$

$$(u' - x)^2 + (v' - y)^2 + (w' - z)^2 = 1$$
$$(u'' - x)^2 + (v'' - y)^2 + (w'' - z)^2 = 1$$

Diyelim ki komşu olmayanlar arasinda $(u, v, w), (u', v', w'), (u'', v'', w'')$ köşeleriyle bir $K_{3,3}$ altçizgesi olsun.

Hatırlayacak olursak,

$$E(G) = \{(x, y, z), (a, b, c) : (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = 1\}.$$

G'deki komşuluk ilişkilerinin tanımından dolayı , eğer yukarıdakilerin $(x, y, z) = (a, b, c)$, $(x, y, z) = (a', b', c')$ ve $(x, y, z) = (a'', b'', c'')$ olarak üç farklı komşusu varsa aşağıdaki sistemi sağlıyor:

$$(u - x)^2 + (v - y)^2 + (w - z)^2 = 1$$

$$(u' - x)^2 + (v' - y)^2 + (w' - z)^2 = 1$$

$$(u'' - x)^2 + (v'' - y)^2 + (w'' - z)^2 = 1$$

Ama üç ayrı küre (yuzeyleri) en fazla iki noktada kesişir,
$K_{3,3}$ olamaz G'de!!!

Turán's teoreminin olasılıksal bir ispatı

Teorem (Turán, 1941)

$r \geq 3$ *için,* $\mathrm{ex}(n, K_r) = t_{r-1}(n) = \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)\binom{n}{2} + O(n).$

G: Köşe kümesi $V = \{1, \ldots, n\}$ olan bir rastgele çizge olsun.
$d(v)$: v'nin derecesi
$\omega(G)$, klik sayısı: G'deki maksimum kliğin köşe sayısı.

Turán's teoreminin olasılıksal bir ispatı

Teorem (Turán, 1941)

$r \geq 3$ *için*, $\mathrm{ex}(n, K_r) = t_{r-1}(n) = \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)\binom{n}{2} + O(n)$.

G: Köşe kümesi $V = \{1, \ldots, n\}$ olan bir rastgele çizge olsun.
$d(v)$: v'nin derecesi
$\omega(G)$, klik sayısı: G'deki maksimum kliğin köşe sayısı.

İddia: $\omega(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n - d(i)}$.

Turán's teoreminin olasılıksal bir ispatı

Teorem (Turán, 1941)

$r \geq 3$ *için*, $\mathrm{ex}(n, K_r) = t_{r-1}(n) = \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)\binom{n}{2} + O(n)$.

G: Köşe kümesi $V = \{1, \ldots, n\}$ olan bir rastgele çizge olsun.
$d(v)$: v'nin derecesi
$\omega(G)$, klik sayısı: G'deki maksimum kliğin köşe sayısı.

İddia: $\omega(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n - d(i)}$.

İspat:
$\pi := v_1, \ldots, v_n$, V'nin rastgele bir permütasyonu olsun.

Turán's teoreminin olasılıksal bir ispatı

Teorem (Turán, 1941)

$r \geq 3$ *için*, $\mathrm{ex}(n, K_r) = t_{r-1}(n) = \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)\binom{n}{2} + O(n)$.

G: Köşe kümesi $V = \{1, \ldots, n\}$ olan bir rastgele çizge olsun.
$d(v)$: v'nin derecesi
$\omega(G)$, klik sayısı: G'deki maksimum kliğin köşe sayısı.

İddia: $\omega(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n - d(i)}$.

İspat:
$\pi := v_1, \ldots, v_n$, V'nin rastgele bir permütasyonu olsun.
$C_\pi := \{v_i : v_i v_j \in E(G)$ her $j < i$ için$\}$, C_π, G'de bir klik oluşturur

Turán's teoreminin olasılıksal bir ispatı

Teorem (Turán, 1941)

$r \geq 3$ *için*, $\mathrm{ex}(n, K_r) = t_{r-1}(n) = \left(1 - \frac{1}{r-1}\right)\binom{n}{2} + O(n)$.

G: Köşe kümesi $V = \{1, \ldots, n\}$ olan bir rastgele çizge olsun.
$d(v)$: v'nin derecesi
$\omega(G)$, klik sayısı: G'deki maksimum kliğin köşe sayısı.

İddia: $\omega(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n - d(i)}$.

İspat:
$\pi := v_1, \ldots, v_n$, V'nin rastgele bir permütasyonu olsun.
$C_\pi := \{v_i : v_i v_j \in E(G) \text{ her } j < i \text{ için}\}$, C_π, G'de bir klik oluşturur

Bir v köşesi için, $v \in C_\pi$'nin olasılığı

$X := |C_\pi|$

$$X_v = \begin{cases} 1 & \text{eğer } v \in C_\pi \\ 0 & \text{eğer } v \notin C_\pi \end{cases}$$

Bir v köşesi için, $v \in C_\pi$'nin olasılığı

$X := |C_\pi|$

$$X_v = \begin{cases} 1 & \text{eğer } v \in C_\pi \\ 0 & \text{eğer } v \notin C_\pi \end{cases}$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Bir v köşesi için, $v \in C_\pi$'nin olasılığı

$X := |C_\pi|$

$$X_v = \begin{cases} 1 & \text{eğer } v \in C_\pi \\ 0 & \text{eğer } v \notin C_\pi \end{cases} \qquad X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$Pr(\text{v, tüm komşusu olmayanların solunda}) = \frac{1}{n - d(v)}$$

Bir v köşesi için, $v \in C_\pi$'nin olasılığı

$X := |C_\pi|$

$$X_v = \begin{cases} 1 & \text{eğer } v \in C_\pi \\ 0 & \text{eğer } v \notin C_\pi \end{cases} \qquad X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$Pr(\text{v, tüm komşusu olmayanların solunda}) = \frac{1}{n - d(v)}$$

$$\therefore |C_\pi| \geq \mathbb{E}(|C_\pi|)$$

Bir v köşesi için, $v \in C_\pi$'nin olasılığı

$X := |C_\pi|$

$$X_v = \begin{cases} 1 & \text{eğer } v \in C_\pi \\ 0 & \text{eğer } v \notin C_\pi \end{cases} \qquad X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$Pr(\text{v, tüm komşusu olmayanların solunda}) = \frac{1}{n - d(v)}$$

$$\therefore |C_\pi| \geq \mathbb{E}(|C_\pi|) = \mathbb{E}(X)$$

Bir v köşesi için, $v \in C_\pi$'nin olasılığı

$X := |C_\pi|$

$$X_v = \begin{cases} 1 & \text{eğer } v \in C_\pi \\ 0 & \text{eğer } v \notin C_\pi \end{cases} \qquad X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$Pr(\text{v, tüm komşusu olmayanların solunda}) = \frac{1}{n - d(v)}$$

$$\therefore |C_\pi| \geq \mathbb{E}(|C_\pi|) = \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n - d(v)}$$

$\square$

İspatın sonu

Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$<\mathbf{a},\mathbf{b}>$ *herhangi iki vektörün içsel çarpımı ve herhangi bir* $\mathbf{x}$ *vektörünün normu* $|x|^2 := <\mathbf{x},\mathbf{x}>$ *olsun. Bu durumda*

$$<\mathbf{a},\mathbf{b}>^2 \leq <\mathbf{a},\mathbf{a}><\mathbf{b},\mathbf{b}> = |a|^2|b|^2.$$

İspatın sonu

Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$<\mathbf{a},\mathbf{b}>$ *herhangi iki vektörün içsel çarpımı ve herhangi bir* $\mathbf{x}$ *vektörünün normu* $|x|^2 := <\mathbf{x},\mathbf{x}>$ *olsun. Bu durumda*

$$<\mathbf{a},\mathbf{b}>^2 \leq <\mathbf{a},\mathbf{a}><\mathbf{b},\mathbf{b}> = |a|^2|b|^2.$$

Örneğin, eğer $\mathbf{a} = (1,2,3)$ *ve* $\mathbf{b} = (3,0,4)$ *ise, o zaman*

$$(1\cdot 3 + 2\cdot 0 + 3\cdot 4)^2 = 225 \leq (1^2+2^2+3^2)(3^2+0^2+4^2) = 350.$$

$a_i = \sqrt{n-d(i)}$, $b_i = \frac{1}{\sqrt{n-d(i)}}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

$$\therefore \quad n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(n-d(i))\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-d(i)}\right)$$

İspatın sonu

Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >$ *herhangi iki vektörün içsel çarpımı ve herhangi bir* $\mathbf{x}$ *vektörünün normu* $|x|^2 := <\mathbf{x},\mathbf{x}>$ *olsun. Bu durumda*

$$< \mathbf{a}, \mathbf{b} >^2 \leq < \mathbf{a}, \mathbf{a} >< \mathbf{b}, \mathbf{b} > = |a|^2 |b|^2.$$

Örneğin, eğer $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ *ve* $\mathbf{b} = (3, 0, 4)$ *ise, o zaman*

$$(1 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4)^2 = 225 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(3^2 + 0^2 + 4^2) = 350.$$

$a_i = \sqrt{n - d(i)}$, $b_i = \frac{1}{\sqrt{n-d(i)}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$\therefore \quad n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(n - d(i))\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n - d(i)}\right) \leq \left(\sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}}(\mathbf{n} - \mathbf{d}(\mathbf{i}))\right)\omega(G).$$

İspatın sonu

Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$<\mathbf{a},\mathbf{b}>$ *herhangi iki vektörün içsel çarpımı ve herhangi bir* $\mathbf{x}$ *vektörünün normu* $|x|^2 := <\mathbf{x},\mathbf{x}>$ *olsun. Bu durumda*

$$<\mathbf{a},\mathbf{b}>^2 \leq <\mathbf{a},\mathbf{a}><\mathbf{b},\mathbf{b}> = |a|^2|b|^2.$$

Örneğin, eğer $\mathbf{a} = (1,2,3)$ *ve* $\mathbf{b} = (3,0,4)$ *ise, o zaman*

$$(1\cdot 3 + 2\cdot 0 + 3\cdot 4)^2 = 225 \leq (1^2+2^2+3^2)(3^2+0^2+4^2) = 350.$$

$a_i = \sqrt{n-d(i)}$, $b_i = \frac{1}{\sqrt{n-d(i)}}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

$$\therefore \quad n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(n-d(i))\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-d(i)}\right) \leq \left(\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}(\mathbf{n}-\mathbf{d(i)})\right)\omega(G).$$

$\omega(G) \leq r-1$ varsayımıyla ve $\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2|E(G)|$ dolayısıyla,

İspatın sonu

Cauchy-Schwarz eşitsizliği

$<\mathbf{a},\mathbf{b}>$ *herhangi iki vektörün içsel çarpımı ve herhangi bir* $\mathbf{x}$ *vektörünün normu* $|x|^2 := <\mathbf{x},\mathbf{x}>$ *olsun. Bu durumda*

$$<\mathbf{a},\mathbf{b}>^2 \leq <\mathbf{a},\mathbf{a}><\mathbf{b},\mathbf{b}> = |a|^2|b|^2.$$

Örneğin, eğer $\mathbf{a} = (1,2,3)$ *ve* $\mathbf{b} = (3,0,4)$ *ise, o zaman*

$$(1\cdot 3 + 2\cdot 0 + 3\cdot 4)^2 = 225 \leq (1^2+2^2+3^2)(3^2+0^2+4^2) = 350.$$

$a_i = \sqrt{n-d(i)}$, $b_i = \frac{1}{\sqrt{n-d(i)}}$, $i = 1,2,\ldots,n$.

$$\therefore \quad n^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}(n-d(i))\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-d(i)}\right) \leq \left(\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}}(\mathbf{n}-\mathbf{d(i)})\right)\omega(G).$$

$\omega(G) \leq r-1$ varsayımıyla ve $\sum_{i=1}^{n} d(i) = 2|E(G)|$ dolayısıyla,

$$n^2 \leq (\mathbf{n}^2 - \mathbf{2}|\mathbf{E}(\mathbf{G})|)(r-1)$$

İçerik listesi

Jensen eşitsizliği

Bir konvex ϕ fonksiyonu ve tanım kümesindeki $x_1, \ldots, x_n$ sayıları için, pozitif a_i ağırlıklarıyla aşağıdaki doğrudur.

$$\phi\left(\frac{\sum a_i x_i}{\sum a_j}\right) \leq \frac{\sum a_i \phi(x_i)}{\sum a_j}$$

Uygulamalarından bir örnek: $K_{2,2} \notin G$ ise $e(G) \leq cn^{3/2}$ bir c sabit sayısı için.
İspat: $a_i = 1$ her i için, $\phi(x) = \binom{x}{2}$ ve $x_i = d(v_i)$ olsun.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2e}{n}\right)^2 \approx \binom{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} d(v_i)}{n}}{2} \overset{(Jensen)}{\leq} \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \binom{d(v_i)}{2}}{n} \overset{(resim)}{\leq} \frac{\binom{n}{2}}{n} \approx \frac{n^2}{2n}$$

Jensen eşitsizliği

Bir konvex ϕ fonksiyonu ve tanım kümesindeki $x_1, \ldots, x_n$ sayıları için, pozitif a_i ağırlıklarıyla aşağıdaki doğrudur.

$$\phi\left(\frac{\sum a_i x_i}{\sum a_j}\right) \leq \frac{\sum a_i \phi(x_i)}{\sum a_j}$$

Uygulamalarından bir örnek: $K_{2,2} \notin G$ ise $e(G) \leq cn^{3/2}$ bir c sabit sayısı için.
İspat: $a_i = 1$ her i için, $\phi(x) = \binom{x}{2}$ ve $x_i = d(v_i)$ olsun.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2e}{n}\right)^2 \approx \binom{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} d(v_i)}{n}}{2} \overset{(Jensen)}{\leq} \frac{\sum_{i=1}^{i=n} \binom{d(v_i)}{2}}{n} \overset{(resim)}{\leq} \frac{\binom{n}{2}}{n} \approx \frac{n^2}{2n}$$