Alan Kovaryansları İçin Grup Seyrekliğine Dayalı Seyrek Kodlama
Group Sparsity Based Sparse Coding for Region Covariances *

Hasan Tuğrul Erdoğan, Erkut Erdem, Aykut Erdem
Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
Hacettepe Üniversitesi
Ankara , Türkiye 06800
Email: {b20724725, erkut,aykut}@cs.hacettepe.edu.tr

***Özetçe* —Son yıllarda görüntü işleme ve bilgisayarlı görü alanlarında yapılan çalışmalarda seyrek gösterimlerin gittikçe artan oranda kullanıldıkları göze çarpmaktadır. Bu ilginin altında yatan sebep, hedefin bir sözlükten az sayıda atom ile ifade edilmesi neticesinde etkin ve gürbüz bir gösterimin elde elde ediliyor olmasıdır. Seyrek kodlamada izlenen yaygın yaklaşım sözlüğün Öklid uzayında yaşayan atomlardan oluşturulmasıdır. Son yıllardaki bazı çalışmalar ise bunun yerine kovaryans matrisine dayalı sözlük elemanları kullanmayı önermiş ve bu sayede daha etkili seyrek gösterimler elde edilebileceğini göstermişlerdir. Ancak kovaryans matrisleri Öklid uzayı yerine kendilerine has bir Riemannian manifoldu üzerinde yaşadıkları için bu çalışmalarda önerilen eniyileme yöntemleri standart yöntemlerce uygulananlara göre bazı temel farklar içermektedir. Bu çalışmada Sivalingram ve diğerleri tarafından geliştirilen bu tarz bir seyrek gösterimin Sivalingam ve diğerleri tarafından grup seyrekliği kısıtı katılarak zenginleştirilmesi önerilmektedir. Bir yüz tanıma uygulaması üzerinde gerçekleştirilen deneyler grup seyrekliğinin tanıma başarısını arttırdığını göstermektedir.**

Anahtar Kelimeler—Seyrek kodlama; grup seyrekliği, kovaryans tabanlı gösterimler.

***Abstract*—In the recent years, there has been an increasing interest in using sparse representations for image processing and computer vision. The main reason behind their popularity is that they could provide a more robust and efficient way of reconstructing a target by means of a limited number of atoms in a dictionary. The common practice in sparse coding is to use dictionary atoms which live in Euclidean spaces. In recent years, some studies proposed to use region covariance based dictionary atoms to come up with more effective sparse coding schemes. The optimization schemes suggested by these studies are fundamentally different than those of the standard methods since covariance matrices live in a special Riemannian manifold. In this study, we propose to enrich such a sparse coding scheme proposed by Sivalingram *et al.* with a group sparsity constraint. The experimental results on a face recognition task reveals that considering group sparsity improves the recognition rate.**

Keywords—Sparse coding; group sparsity, covariance-based representations.

978-1-4673-5563-6/13/$31.00 ©2013 IEEE

I. GİRİŞ

Seyrek gösterim, memelilerin görme sistemlerinden ilham alınarak önerilen etkin bir gösterim şeklidir [1] ve son yıllarda seyrek gösterimi baz alan bilgisayarlı görü çalışmalarının sayısında ciddi bir ivmelenme gözlemlenmektedir [2]. Sözü edilen bu gösterim, kısaca bir verinin varolan bir sözlük üzerinden çok az sayıda sözlük atomu cinsinden temsil edilmesi olarak ifade edilebilir. Seyrek gösterimin kalbi olan bu sözlük atomlarının temsilinde başlangıçtaki çoğu çalışmada düz görüntü pikselleri kullanılmışken [3], zamanla görüntü üzerinden çıkarılan daha karmaşık öznitelikler de kullanılmaya başlanmıştır. Bu yöndeki çalışmaların, seyrek gösterime daha fazla çeviklik kattığı söylenebilir. Sivalingam *ve diğerleri* [4] ve Sra ve Cherian [5] tarafından gerçekleştirilen çalışmalarda seyrek gösterim sözlüğü oluşturulurken görüntünün piksel değerleri yerine, görüntüden çıkarılan farklı öznitelik vektörlerinin birbirlerine göreli değişimlerini ortaya koyan kovaryans matrisi [6] kullanılması önerilmiştir.

Nesne tanıma konusunda şimdiye kadar çok sayıda çalışma yapılmıştır. Görme problemlerinde; hedef nesneler, görüntü içerisinde hep aynı görünümde olmadıklarından asıl problem bir nesneyi karşılaşılacak farklı görünümlerinden de tanıyabilme olmaktadır. Bu bağlamda bilgisayara nesnenın tüm görünümlerini kapsasyan bir tanımınının öğretilmesi gerekmektedir. Bir nesnenin tüm perspektifleri bu kümenin içerisinde mevcut olduğu durumda tanıma işlemi oldukça başarılı olacak olsa da, gerçek dünyadaki çoğu problemde bunu sağlayacak kadar geniş tanımlama yapabilmek oldukça güç hatta imkansız olabilmektedir. Wright *ve diğerleri* tarafından önerilen bir yüz tanıma çalışmasında tanınacak şahısların yüzlerinin farklı görünümlerinden oluşturulan bir sözlük ve bu sözlüğe dayalı bir seyrek gösterim başarıyla kullanılmıştır [7].

Bildirinin devamı şu şekilde düzenlenmiştir: İkinci bölümde sunulan çalışmayla ilgili çalışmalar özetlenmektir. Bunun ardından üçüncü bölümde grup kısıtına dayalı önerilen seyrek gösterim modeli açıklanmaktadır. Dördüncü bölümde deneysel analizler sunulmakta ve ardından son bölümde elde edilen sonuçlar değelendirilip sonraki olası çalışmalara değinilmektedir.

II. İLGILI ÇALIŞMALAR

A. Kovaryans Matrisi

Bilgisayarla görüde kovaryans matrisi ise, ilk olarak Tuzel *ve diğerleri* tarafından [6]'deki çalışmada görüntü kesimlerinin temsilinde kullanılmıştır. Kovaryans matrisi, farklı görsel özniteliklerin gözlemlerini doğal bir şekilde birleştirmeyi olanaklı kılan ve salt piksel değerlerini tutan gösterimlere oranla az yer kaplayan bir gösterimdir. Bir kovaryans matrisinin çapraz elemanları ilgili öznitelik varyanslarını kodlarken geri kalan elemanları farklı öznitelikler arasındaki korelasyonu göstermektedir.

Verilen bir görüntü $\mathcal{I}$ üzerinde, her piksel değeri $i \in \mathcal{I}$ yi $n-$boyutlu öznitelik vektörüne eşleyen ϕ fonksiyonu olduğu düşünülsün:

$$\phi(I, x_i, y_i) = z_i, \tag{1}$$

Burada $z_i \in \mathbb{R}^n$ ve (x_i, y_i) görüntünün i. konumundaki pikselin koordinatı olmak üzere; $\mathbb{R}$ alt bölgesi, $n \times n$ boyutundaki özellik vektörlerinin kovaryans matrisi olan C_R ve μ_R ortalama vektörü olmak üzere:

$$\mu_R = \frac{1}{|R|} \sum_{i=1}^{|R|} z_i, \tag{2}$$

aşağıdaki denklem ile ifade edilebilir:

$$C_R = \frac{1}{|R| - 1} \sum_{i=1}^{|R|} (z_i - \mu_R)(z_i - \mu_R)^T. \tag{3}$$

Kovaryans matrisi tanımlanırken çıkarılacak görüntü öznitelikleri, görüntü içeriğini karakterize edecek özellikleri taşıyacak şekilde seçilmelidir. Özellikle görüntünün kovaryans matrisi ile temsil edilen halinde, orjinal yapının taşıdığı uzlamsal bilginin kaybolacağı düşünüldüğünde, kovaryans matrisine aktarılacak görüntü özniteliklerinin seçiminin; yapılan çalışmanın başarısı bakımından en az yöntem kadar önemli olduğu farkedilmektedir.

Kovaryans matrisi, farklı noktalardaki piksel değerlerinden oluşan görüntü içerisindeki karakteristik özellikleri; öznitelik sayısı boyutunda sabit büyüklükte bir kare matris ile gösterebilmeyi mümkün kılmasından dolayı; ihtiyaç duyulan bellek ihtiyacını ve işlem karmaşıklığını azaltan minimal bir gösterim biçimidir. Kovaryans matrisi ile görüntü boyutu ne olursa olsun sabit boyutlu bir matris ile ifade edilebilmesine karşın, o görüntüdeki karakteristik özellikleri hala koruyabilmesi cazibesinin kaynağıdır. Ancak yine belirtmek gerekir ki tüm bu avantajlarına rağmen kovaryans matrisinin pozitif tanımlı matris olma zorunluluğu ve özel bir uzayda yaşamasından dolayı geleneksel makina öğrenme algortimalarına adaptasyonu kısmen zordur.

B. Seyrek Gösterim

Seyrek gösterime dayalı temsillerde iki ana problem mevcuttur. Bu ana problemler, öğrenme verilerinden bir sözlük oluşturulması ve ardından kodlanacak verinin oluşturulan bu sözlüğün atomlarının ağırlıklı toplamı olarak ifade edilen temsil ile asıl hali arasında en az uzaklık olacak şekilde ifade edilmesidir.

Örnek verilecek bir yüz tanıma probleminde sözlük oluşturulurken farklı insanların birden çok perspektifinden çekilerek, kimlere ait olduğu etiketlenmiş veri kümesinden denetlenen bir öğrenme ile gerçekleştirilmektedir. Sözlükteki her bir eleman, ilgili kişinin faklı bir perspektifinden veya farklı aydınlanma durumu altında çekilmiş görüntüsünün kovaryans matrisidir. Bundan dolayı veri kümesindeki her bir resimin öncelikli olarak kovaryans matrisi çıkarılarak, ardından ait olduğu kişinin etiketi ile sözlüğe atom olarak aktarılmaktadır.

Seyrek kodlama safhasında ise bir seferlik yapılan sözlük oluşturmanın ardından, nesne tanıma aşamasının başında her bir görüntü varolan sözlük üzerinden seyrek olarak kodlanır. Kodlama problemi; eldeki test verisini, oluşturulan sözlük atomları cinsinden, minimum sayıda sözlük atomuna benzeterek orjinaline en yakın şekilde ifade etmeye çalışmak olarak ifade edilebilir. I verilen görüntü, D sözlük, x^* seyrek kod vektörünü elamanları ve λ seyreklik katsayısı olmak üzere şeklinde salt görüntü pikselleri üzerinden seyrek kodlama problemi, aşağıdaki eniyileme problemi olarak tanımlanmaktadır:

$$x^* = \arg\min_x \|I - Dx\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \tag{4}$$

Denklem (4)'te seyrek kod x için kullanılan düzleştirme terimi L^1 uzayı üzerinde tanımlanması seyrekliği sağlamaktadır.

III. ÖNERILEN YAKLAŞIM

Önerilen seyrek kodlama yaklaşımı, Sivalingram *ve diğerleri* tarafından geliştirilen seyrek kodlama gösterimine [4] dayanmaktadır. Çalışmamızda bu gösterimin, grup seyrekliği kısıtı katılarak zenginleştirilmesi önerilmektedir.

Baz aldığımız seyrek kodlama gösterimi [4], diğer seyrek kodlama çalışmalarından farklı olarak sözlük atomları olarak kovaryans matrislerini kullanmaktadır (Şekil 1). Buna dayalı olarak özel bir Riemannian manifoldda yaşayan kovaryans matrisleri için uzaklık hesabı yapılırken Öklid uzaklığı yerine; bu manifold üzerinde tanımlı özel bir uzaklık ölçüsüne dayalı bir eniyileme önerilmiştir. Bu uzaklık ölçüsü, Bregman farkının (divergence) yarı kesin pozitif matrisler için LogDet farkıyla ilişkili olduğu gerçeği üzerinden tanımlanmıştır.

Çok değişkenli Gaussian dağılımındaki P_X ve P_Y için KL-farkı, dağılımların kovaryans matrisleri X^{-1} ve Y^{-1} ile:

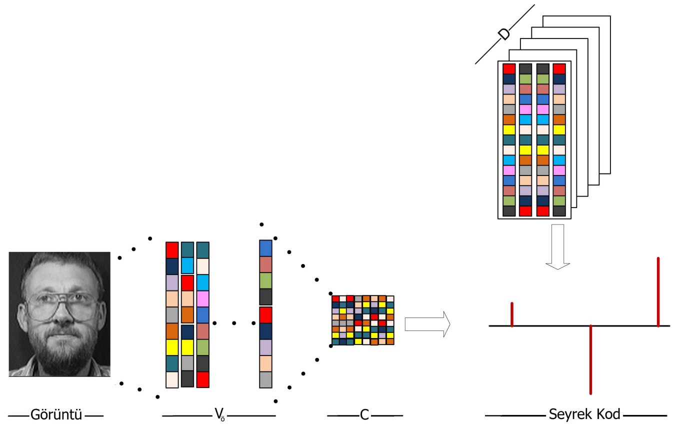
$$KL(P_Y \| P_X) = \frac{1}{2} D_{ld}(Y^{-1}, X^{-1}) = \frac{1}{2} D_{ld}(X, Y) \tag{5}$$

şeklinde, D_{ld} LogDet farkını ifade etmek üzere, yazılabilir. Burada LogDet farkı aşağıda formül ile hesaplanmaktadır:

$$D_{ld}(X, Y) = tr(XY^{-1}) - logdet(XY^{-1}) - n \tag{6}$$

Seyrek koda dayalı bir gösterim kullanıldığında, orjinal yapıdaki kaynak kovaryans matrisi K ile, seyrek kod ile hesaplanan temsil $\hat{K}$ arasındaki bu farkın LogDet ile ifadesi aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} D_{ld}(K, \hat{K}) \quad &= \quad tr\left(\left(\sum_{i=1}^{k} x_i A_i\right) K^{-1}\right) \\ &- \quad logdet\left(\left(\sum_{i=1}^{k} x_i A_i\right) K^{-1}\right) - n \end{aligned} \tag{7}$$



Şekil 1. *Kovaryans matrisi tabanlı seyrek kodlama.* Görüntüden karakteristik V_o öznitelik vektörleri çıkarılır. Ardından çıkarılan bu vektörlerden görüntüyü ifade eden C kovaryans matrisi hesaplanır. Bu kovaryans matrisini en az hata ile ifade eden *seyrek kod* verilen bir D sözlüğüne göre o sözlükteki atomların ağırlıklı toplam vektörü olarak çıkarılır. ([5]'dan uyarlanmıştır.)

Burada x_i seyrek kod vektörünün elemanları, A_i sözlükteki atomlar, tr matrisler üzerinde tanımlı trace operatörü ve $\hat{A}_i = K^{-1/2} A_i K^{-1/2}$ olmak üzere, ifade:

$$D_{ld}(K, \hat{K}) = \sum_{i=1}^{k} x_i tr \hat{A}_i - logdet\left(\sum_{i=1}^{k} x_i \hat{A}_i\right) - n \quad (8)$$

şeklinde yeniden de yazılabilir.

Seyrek kodlamada temsilin, orjinal yapı ile arasındaki farkın minimum olduğu biçimi elde edilmeye çalışıldığından $\hat{K} = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_k A_k \succeq 0$ ifadesinin yarı kesin pozitif bir matris olması gerekmektedir. Bu problem, seyreklik koşulları katılarak konveks bir eniyileme problemi biçimine dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned} x^* = \arg\min_x & \sum_{i=k}^{k} x_i tr \hat{A}_i - logdet\left(\sum_{i=k}^{k} x_i \hat{A}_i\right) + \lambda \|x\|_1 \\ & x \geq 0 \\ & x_1 \hat{A}_1 + x_2 \hat{A}_2 + ... x_k \hat{A}_k \succeq 0 \\ & x_1 \hat{A}_1 + x_2 \hat{A}_2 + ... x_k \hat{A}_k \preceq I_n \end{aligned} \quad (9)$$

Burada I_n, $n \times n$ boyutundaki birim matrisi ifade etmektedir.

Bazı pratik uygulamalar için seyrek kod vektöründeki katsayılar üzerinde aynı grup içindeki değişkenlerin eşzamanlı olarak sıfır veya eşzamanlı sıfırdan farklı olduğu bir grup yapısı gerekli olabilmektedir [8]. Bu tarz bir yapının mevcut olduğu problemler için Denklem (4)'a dayalı bir eniyileme yerine bu grup seyrekliğine dayalı aşağıdaki gibi bir eniyilemenin yapılması gerekmektedir:

$$x^* = \arg\min_x \|I - Dx\|_2^2 + \lambda \sum_{j=1}^{m} \|x_{G_j}\|_2 \quad (10)$$

Burada m grup sayısını, G_j j'ninci grubu ve x_{G_j} bu gruba ait seyrek katsayıları ifade etmektedir.

Çalışmamızda, yukarıda değinilen grup seyrekliği varsayımı, Sivalingam *ve diğerleri* [4] tarafından önerilen kovaryans matrisine dayalı seyrek gösterimi bu yönde zenginleştirmek için kullanılmıştır. Denklem (10)'daki yapıya benzer olarak m grup sayısını, G_j j'ninci grubu ve x_{G_j} bu gruba ait seyrek katsayıları ifade ettiği durumda kovaryans matrisleri için grup seyrekliğine dayalı seyrek gösterim aşağıdaki eniyileme problemi çözülerek hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} x^* = \arg\min_x & \sum_{i=k}^{k} x_i tr \hat{A}_i - logdet\left(\sum_{i=k}^{k} x_i \hat{A}_i\right) + \lambda \sum_{j=1}^{m} \|x_{G_j}\|_2 \\ & x \geq 0 \\ & x_1 \hat{A}_1 + x_2 \hat{A}_2 + ... x_k \hat{A}_k \succeq 0 \\ & x_1 \hat{A}_1 + x_2 \hat{A}_2 + ... x_k \hat{A}_k \preceq I_n \end{aligned} \quad (11)$$

Yukarıdaki ifadede atomların seyrekliği hesaplanırken öncelikli olarak grupların sahip olduğu seyrek kod vektorlerinin normları üzerinden grup seyrekliği sağlanarak çözüme gidilmektedir.

Test verisinden sözlük vasıtası ile kodlanarak elde edilen seyrek kod vektörünün, maksimum genliğe sahip olduğu konumu baz alan bir sınıflandırma yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemde maksimum genlik değeri; her grup için, o gruba ait olan atomların test verisine verdiği katsayıların toplamı alınması ile hesaplanmaktadır. Ardından gruplar için hesaplanan maksimum genlik değerleri içinde en yüsek olan değere sahip olan grubun indeksi, test verisinin ait olduğu grubun indeksi olarak geri döndürülmektedir. s^* test verisinin ait olduğu grubun indeksi olmak üzere:

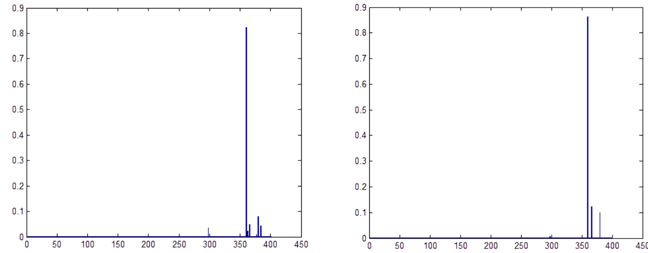
$$s^* = \arg\max_s \sum_{A_i \in G_s} x_i \quad (12)$$

Maksimum genlik hesaplanırken yalnızca maksimum genliğe sahip olan atom yerine, tüm gruba ait atomların genliklerinin toplamına bakılmasındaki amaç; seyrek kodlama sırasında test verisinin ait olduğu grubun tüm atomlarına belli oranda benzer olacağı ve tanımlanmış olan seyreklik kısıtlarından dolayı bu çoklu benzerliğin, ilgili grubun tüm atomları arasında *kendi genliğini maksimum yaparken, kendisi dışındaki genlikleri sıfırlama savaşı*na dönüştüğünden, benzerliğin grup içerisinde dağılma etkisinin grup içerisindeki atomların genlikerini toplayarak giderilmeye çalışılmasıdır.

IV. Deneysel Analiz

Bu çalışmada önerilen grup seyrekliğine dayalı seyrek kodlama yaklaşımının sonuçlara olan etkisi bir yüz tanıma problemi üzerinden incelenmiştir. Gerçekleştirilen deneylerde farklı insanların birden fazla yüz görüntülerinden oluşan veri kümesi öğrenme ve test olarak iki ayrı kümeye ayrılmış, öğrenme kümesindeki örnekler görsel bir sözlüğün oluşturulmasında kullanılırken geri kalan örnekler sorgu görüntüleri olarak kullanılmıştır. Aşağıda çeşitli gerçekleştirme detayları ve deneylerde kullandığımız veri kümesine ait bilgiler verilmektedir.

Şekil 2. Deneylerde kullanılan *GeorgiaTech Yüz Veri Kümesinden* [9] çeşitli örnek görüntüler.



Şekil 3. Grup seyrekliği ile elde edilen seyrek kod (solda) ve grup seyrekliği gözetilmeden elde edilen seyrek kod (sağda).

Tablo I. DENEYSEL SONUÇLAR

Öğrenme/Test Görüntüsü Sayıları	Grup Seyrekliği Kısıtı ile	Grup Seyrekliği Gözetilmeden
4/11	**0.572**$\pm$0.058	0.569$\pm$0.057
6/9	**0.620**$\pm$0.023	0.616$\pm$0.022
8/7	**0.686**$\pm$0.015	0.684$\pm$0.012
10/5	**0.739**$\pm$0.028	**0.739**$\pm$0.027
12/3	0.795$\pm$0.033	**0.798**$\pm$0.030

Kovaryans matrisi çıkarma esnasında; kovaryans matrisi içerisinde birbirlerine göreli dağılımları ifade edilecek, görüntüyü basit olarak ifade eden 7 adet öznitelik seçimiştir. Bu özniteliklerin meydana getirdiği öznitelik vektörü şu şekildedir:

$$\phi(I,x,y) = \left[I(x,y),\ x,\ y,\ \frac{\partial I}{\partial x},\ \frac{\partial I}{\partial y},\ \frac{\partial^2 I}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \right] \tag{13}$$

Georgia Tech Yüz Veri Kümesinde [9] 50 farklı kişinin yüzlerinin pozlarının ve yüz ifadelerinin değiştiği toplam 15 görüntü bulunmaktadır (Şekil 2). Deneyler sırasında her bir kişiye ait görüntüler sırasıyla 4, 6, 8, 10, 12 sayıdaki öğrenme görüntüsü, 7'şer farklı kombinasyon ile rastgele seçilerek yöntemin başarımı ölçülmüştür. Çalışmanın incelediği grup seyrekliği kısıtının sonuçlara olan etkisinin belirlenmesi adına adına aynı yapılandırmadaki öğrenme/test senaryoları hem grup serekliği kısıtı ile hem de grup seyrekliği kısıtı olmadan çalıştırılarak sonuçlar elde edilmiştir.

Şekil 3'de bir sorgu görüntüsü için aynı görüntünün grup seyrekliği kısıtı kullanılarak ve grup seyrekliği gözetilmeyerek elde edilen seyrek kodlar yan yana gösterilmektedir. Sonuçlar değerlendirildiğinde grup seyrekliği kısıtının seyrek kod üzerinde sorgunun dahil olmadığı sınıflara ait atomlara atanan ağırlıkları sorgunun ait olduğu sınıfa ait atomlara taşıdığı ve böylece gruplar arasında daha keskin bir ayrıma gittiği görülmektedir. Grup seyrekliği, aslen aynı sınıf içerisindeki atomlar arasında ya hep birlikte ya da hiç olarak tanımlandığından maksimum değerli atomun değerinin grup arkadaşları tarafından bir miktar paylaşılmasına ve sonuçta maksimum genliğin belli bir oranda azalmasına sebep olduğu gözlemlenmektedir.

Farklı sayıda örnekler içeren öğrenme ve test kümeleri için gerçekleştirdiğimiz deneylerin sonucu (ortalama başarı ve standard sapma değerleri) Tablo I'de verilmiştir. Ortaya çıkan sonuçlar incelendiğinde grup seyrekliği kısıtının tam faydasını göstermesinin sözlüğü meydana getiren atomların sayısı ile oldukça ilintili olduğu yorumu yapılabilir. Özellikle öğrenme için ayrılan görüntü sayısının az olduğu durumlarda grup seyrekliğinin sonuçlara olumlu yöndekatkı yaptığı görülmektedir. Öğrenme kümesi küçüldükçe örnek sınıflarına dayalı gruplama seyrek gösterimde ilgili grubunun daha iyi ifade edilmesini sağlamaktadır.

V. SONUÇ

Çalışmamızda grup seyrekliği kavramı kovaryans matrislerine dayalı seyrek gösterimler için uyarlanmıştır. Bir yüz tanıma uygulamasında elde ettiğimiz sonuçlar grup seyrekliğine dayalı bir kısıtın sonuçları iyileştirdiğini göstermiştir. Bu iyileşme miktarlarının beklenilen düzeyde olmamasının kullanılan özniteliklerin çok basit olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir. Kullanılan bu öznitelikler yerine Pang *ve diğerleri* [10] tarafından gerçekleştirilen çalışmada olduğu gibi Gabor filtresi tepkilerine dayalı daha karmaşık öznitelikler kullanıldığında başarı oranlarının daha artabileceği öngörülmektedir. Sonraki çalışmalarımızda hem bu konuyu araştırmayı, hem de kovaryans matrisi tabanlı sözlük öğrenme problemi üzerinde çalışarak yöntemimizi daha da geliştirmeyi düşünmekteyiz.

KAYNAKÇA

[1] B. A. Olshausen and D. J. Field, "Sparse coding with an overcomplete basis set: A strategy employed by V1?" *Vision Research*, vol. 37, no. 23, pp. 3311–3325, 1997.

[2] J. Wright, Y. Ma, J. Mairal, G. Sapiro, T. S. Huang, and S. Yan, "Sparse representation for computer vision and pattern recognition," *Proceedings of the IEEE*, vol. 98, no. 6, pp. 1031–1044, 2010.

[3] M. Elad and M. Aharon, "Image denoising via sparse and redundant representations over learned dictionaries," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 15, no. 12, pp. 3736–3745, 2006.

[4] R. Sivalingam, D. Boley, and V. Morellas, "Tensor sparse coding for region covariances," in *ECCV*, 2010.

[5] S. Sra and A. Cherian, "Generalized dictionary learning for symmetric positive definite matrices with application to nearest neighbor retrieval," in *ECML*, 2011.

[6] O. Tuzel, F. Porikli, and P. Meer, "Region covariance: a fast descriptor for detection and classification," in *ECCV*, 2006.

[7] J. Wright, A. Y. Yang, A. Ganesh, S. S. Sastry, and Y. Ma, "Robust face recognition via sparse representation," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 31, no. 2, pp. 210–227, 2009.

[8] J. Huang and T. Zhang, "The benefit of group sparsity," *Ann. Statist.*, vol. 38, no. 4, pp. 1978–2004, 2010.

[9] "Georgia Tech Face Database," http://www.anefian.com/face_reco.htm.

[10] Y. Pang, Y. Yuan, and X. Li, "Gabor-based region covariance matrices for face recognition," *IEEE Transactions on Circuit and Systems for Video Technology*, vol. 18, no. 7, pp. 989–993, 2008.