

SONSUZ BOYUTLU SİSTEMLERİN AYRIŞIM TEKNİKLERİ İLE SONLU BOYUTLU MODELLERE İNDİRGENMESİ

Mehmet Önder Efe¹ ve Hitay Özbay²

¹Atılım Üniversitesi, Mekatronik Mühendisliği Bölümü, İncek 06836, Ankara, **Türkiye**. e-mail: onderefe@ieee.org

²Electrical Engineering Department, The Ohio State Univ., Columbus, OH43210, **U.S.A.**, Electrical and Electronics Eng. Dept. Bilkent University, TR-06800, **Türkiye**. e-mail: ozbay@ee.eng.ohio-state.edu

Özet

Kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilen sistemlerin denetiminde karşılaşılan iki tipik sorundan biri sistemin sonsuz boyutlu olması, diğeri ise ayrışım tekniklerinin otonom diferansiyel denklemler vermesidir. Bu çalışmada, her iki sorun da kontrol mühendisliği açısından ele alınmakta, sınırdan kontrole yönelik modelleme detayları verilmektedir. Sonuçlar, iki boyutlu termal sistem üzerinde tartışılmaktadır.

1 Giriş

Termal sistemlerden aerodinamik sistemlere kadar birçok fiziksel olayın dinamik gösterilimi Kısmi Diferansiyel Denklemlerle (KDD) yapılmaktadır. Ancak zamanda sürekliliğin yanısıra uzaysal süreklilik de eklenince her bir noktada Adi Diferansiyel Denklemlerle (ADD) ifade edilebilen bir sistem ortaya çıkmakta ve KDD sistemi sonsuz sayıda durum değişkenine sahip, sonsuz boyutlu bir sistem olmaktadır. Bu sistemin harici girişi (ya da kontrol girdisi) bağımsız olarak seçilebilen sınır değerler, çıkışı ise oluşan KDD çözümü olmaktadır.

Verilen bir KDD sistemi için, ilk değerler ve sınır değerleri seçildiğinde ortaya çıkan çözümün içerisinde baskın ve baskın olmayan kiplerin belirlenmesini inceleyen birçok çalışma yapılmıştır [1-7]. Tekil Değer Ayrışımı (TDA) ve Uyumlu Ortogonal Ayrışım (UOA) bunlar içerisinde sıklıkla kullanılanlardır. Özellikle işlemsel karmaşıklığın azaltılması anlamında düşünüldüğünde tek boyutlu sistemler için TDA, birden fazla boyutlu sistemler için UOA kullanımı tercih edilmektedir.

Aslında ayrışım teknikleri de bu çalışmada sunulan örnek de ilk defa ele alınmıyor olsa da, kontrol mühendisliği açısından yaklaşıldığında modellemede önemli bir güçlük karşılaşılmaktadır. Literatürde sınır değerlerin, yani kontrol girdisinin dinamik gösterilime ne şekilde katılacağı konusunda bir eksiklik tespit edilmiş, ve bu konu bir örnekle tartışılmıştır. Bunun temel nedeni ise ayrışım sonucunda elde edilen taban fonksiyonlarının ortogonalite özellikleri kullanılarak Galerkin projeksiyonu gerçekleştirildiğinde, eşitliğin karşı tarafında sınır değerlerinin etkisi kapalı biçimde bulunmakta ve ortaya otonom bir ADD kümesi çıkmaktadır. Bu çalışmanın literatüre katkısı, KDD ile ifade edilen sistemlerin sonlu boyutlu modellere indirgenmesinde ayrışım tekniklerinin ne şekilde işlenmesi gerektiğini açıklığa kavuşturmasıdır.

Bu çalışmada ele alınan iki boyutlu termal sistemin kimi varyasyonları daha önce ele alındı, [5-7]. Atwell ve King, kontrol girişinin açık biçimde KDD içerisinde olduğu durumu tartışmış, UOA ile geliştirilmiş bazı modeller üzerinde durmuş, işlemsel karmaşıklık açısından somut bazı bulgular ortaya koymuştur, [5-6]. Mizel ve Seidman ise bir boyutlu termal sistem için zamanda optimal sınır kontrolü probleminin “bang-bang” özelliğe sahip olduğunu göstermiş, Hilbert uzayları tekniklerini kullanmıştır, [7]. Rösch ise sınır değerlerinin karakterizasyonunu bir tanılama problemi olarak ele almış ve optimallik koşullarının sağlanması için iteratif bir yöntem sunmuştur, [8]. Burada dikkat çekilmesi gereken bir husus sınırdan kontrol probleminin basit sistemler için analitik integrasyonla da tam olarak ifade edilebileceğidir, [9-10]. Ancak burada üzerinde duracağımız yöntem nümerik enformasyona dayalı model türetimi olacağı için analitik yöntemlerin cevap veremediği durumlarda da (örneğin akışkanlar mekaniğinde sıkça karşılaşılan Navier-Stokes denklemleri) model geliştirmeye olanak tanıyacak fakat buna mukabil yeni bazı soruları da kaçınılmaz olarak getirecektir.

Bu amaçla, sunulan bildirinin yapısı şöyle tasarlanmıştır: İkinci kısımda UOA yaklaşımı tartışılmış, enstantaneler yöntemi üzerinde durulmuş ve ortogonalite özellikleri verilmiştir. Üçüncü kısımda sonlu boyutlu modelin kurulması ve kontrol girdisinin otonom diferansiyel denklemlerden nasıl ayrıldığı anlatılmış, modelleme çalışmalarına bir örnek dördüncü kısımda detaylı olarak ele alınmıştır. Beşinci kısımda bulgular kısaca özetlenmiş, varılan sonuçlar belirtilmiştir.

2 Uyumlu Ortogonal Ayrışım

Tanım 2.1. Verilen bir KDD'nin zamanla evrimleşen çözümünün herhangi bir zaman anında görüntüsüne bir *enstantane* denir. Bu enstantane içeriği itibarıyla bir boyutlu KDD'ler için bir dizi iken iki boyutlu KDD'ler için bir matristir.

$u^i(x,y)$ enstantanesi iki boyutlu bir sistem için gözlemlenmiş N adet örnekten biri olsun. Anlatımı somutlaştırmak için (1) ile verilen iki boyutlu termal sistemi gözönüne alalım:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \text{ ya da } u_t = c^2 (u_{xx} + u_{yy}). \quad (1)$$

Yukarıda c termal yayılım parametresidir. İlk koşulların –zorunlu olmamakla birlikte– sıfır olduğunu, sürecin $\Omega := (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ ile verilen kare şeklinde fiziksel bir domende cereyan ettiğini ve harici etkinin (kontrol sinyalinin ya da sınır değerlerin) bu domenin köşelerinden girdiğini varsayalım. Çözüm sonsuz sayıda kipten oluşacak ve $u(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) \phi_i(x,y)$ şeklinde yazılabilecektir.

Varsayım 2.2. Bir sürecin UOA ile modellenmesi için sonlu sayıda baskın kipin çözümü yeterli hassasiyette tasvir edebiliyor olması gereklidir.

Yukarıda belirtilen varsayım ve koşullar altında, KDD çözümünün (2) ile verildiği üzere sonlu sayıda kipin toplamsal olarak biraraya getirilmesinden müteşekkil olabileceği rasyonel bir yaklaşımdır.

$$u(x,y,t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \phi_i(x,y) \quad (2)$$

Burada N toplam kip sayısını, $\alpha_i(t)$ i . kipe ait zamansal evrimleşmeyi, $\phi_i(x,y)$ ise aynı kipi uzaysal dağılımını belirleyen bilgiyi taşır. Model geliştirme için kullanılacak UOA prosedürü aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

Adım 1. $\{U^j(x,y)\}_{j=1,\dots,N}$ enstantaneler kümesi için L ile gösterilen $N \times N$ boyutlu korelasyon matrisi $L_{ij} = \langle U_i(x,y), U_j(x,y) \rangle_\Omega = (1/N) \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} U_i(x,y) U_j(x,y)$ ifadesi ile hesaplanır. Burada $\langle \bullet, \bullet \rangle_\Omega$ uzaysal domen (Ω) üzerinde tanımlı iç çarpım operatörüne denk düşer.

Adım 2. L matrisinin v_i ile gösterilen özvektörleri ve λ_i ile gösterilen özdeğerleri bulunur. L matrisi reel ve simetrik olduğundan özdeğerleri reel eksen üzerinde olacaktır. Özdeğerler büyükten küçüğe doğru sıralanır ve her bir özdeğere karşı düşen özvektör de bu sırayı takip edecek şekilde yeniden düzenlenir. Burada dikkat edilmesi gereken bir gerçek $v_i^T v_i = \lambda_i^{-1}$ ilişkisinin sağlandığıdır.

Adım 3. Taban fonksiyonları enstantanelerin uygun bir karışımından türetilir ve aşağıdaki ilişki ile elde edilir:

$$\phi_i(x,y) = \sum_{j=1}^N v_{ij} U_j(x,y), \quad (3)$$

Yukarıda v_{ij} i . özvektörün j . elemanına tekabül eder, $i=1,2,\dots,\text{rank}(L)$ dir ve $\langle \phi_i(x,y), \phi_j(x,y) \rangle_\Omega = \delta_{ij}$ ilişkisi sağlanır. δ_{ij} fonksiyonu Kronecker delta fonksiyonudur.

Adım 4. Bu aşamada zamansal evrimleşmeyi karakterize eden değişkenlerin her bir örnekleme anındaki değerleri (4) denkleminde verildiği gibi hesaplanır ve burada da (5) denkleminde gösterilen ortogonalite özellikleri gözlemlenir:

$$\begin{aligned} \alpha_i(t_0) &= \langle \phi_i(x,y), u(x,y,t_0) \rangle_\Omega = \langle \phi_i(x,y), U_{t_0} \rangle_\Omega \text{ ya da} \\ \langle U_1(x,y), \phi_k(x,y) \rangle_\Omega &= \alpha_k(t_1) \\ \langle U_2(x,y), \phi_k(x,y) \rangle_\Omega &= \alpha_k(t_2) \\ &\vdots \\ \langle U_N(x,y), \phi_k(x,y) \rangle_\Omega &= \alpha_k(t_N) \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^N \langle U_i(x,y), \phi_k(x,y) \rangle_\Omega^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_k(t_i)^2 = \lambda_k \quad (5)$$

Kısaca özetlemek gerekirse, bu kısımda bahsedilen yaklaşım, enstantaneleri kullanarak çözümün –bazı ortogonalite özellikleri gösteren– zamansal ve uzaysal değişkenler cinsinden sonlu sayıda toplam olarak yazılmasıdır. Bu yaklaşım literatürde Uyumlu Ortogonal Ayrışım (*Proper Orthogonal Decomposition*) olarak bilinir, [1-6].

3 Model İndirgeme

(1) ile verilen sistemin davranışını $\Omega := (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ domeni üzerinde gözönüne alalım. Çözüm olarak varsayılan $u(x,y,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) \phi_i(x,y)$ sonsuz toplamı UOA yöntemi ile en fazla N kip ile gösterilmektedir, ve aranan gösterilim ise M kipli sonlu bir toplamdır. Burada $M \leq \text{rank}(L) \leq N < \infty$. Dolayısıyla $M+1$ den sonraki kiplerin genlik bakımından ihmal edilebileceği varsayıp (6) denkleminin her iki tarafındaki büyüklükler yaklaşık eşit yerine eşit kabul edilmektedir.

$$u(x,y,t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(x,y) \quad (6)$$

Çözüm, kendisini üreten denklemleri sağlar. $\zeta_i(x,y) := \phi_i(x,y)_{xx} + \phi_i(x,y)_{yy}$ tanımı ile (6) ile verilen çözüm (1) denkleminde yerine yazılırsa (7) denklemleri elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının $\phi_k(x,y)$ fonksiyonu ile iç çarpımının alınması Galerkin projeksiyonuna denk düşer ki ortogonalite özellikleri gözönüne alındığında (8) denklemleri ile verilen ADD sistemi elde edilir.

$$\sum_{i=1}^M \dot{\alpha}_i(t) \phi_i(x,y) = c^2 \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \zeta_i(x,y) \quad (7)$$

$$\dot{\alpha}_k(t) = c^2 \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \langle \phi_k(x,y), \zeta_i(x,y) \rangle_{\Omega}, \quad k=1,2,\dots,M \quad (8)$$

Daha önce teşhis edildiği üzere bizi (8) denklemlerine götüren bilgi nümerik çözüm idi ve bu nümerik çözüm bazı sınır değerler kullanılarak elde edilmesine karşın bu sınır değerler (8) denklemleri içerisinde görünmemektedir. Dolayısıyla (8) denklemleri, kontrol mühendisliği açısından bakıldığında bu sistemin hangi sınır değerleri için hangi zamansal evrimleşmeyi ortaya koyacağını betimleyen bir gösterilim değildir. Bunun tam aksine, hangi sınır değerler (8) denklemlerini elde etmemizi sağladı ise bu denklemler kümesi sadece o koşullar için geçerlidir. Bu kısımda sunulan tartışmanın geri kalanı bu sorunun giderilmesine yöneliktir.

Fiziksel domeni $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ve $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ şeklinde altdomenlere bölelim. Bu durumda, daha önce tanımlandığı şekliyle doğrusal bir operatör olan $\langle \bullet, \bullet \rangle_{\Omega}$ operatörü (9) denklemindeki gibi tekrar kısımlandırılabilir.

$$\langle \phi_k(x,y), \zeta_i(x,y) \rangle_{\Omega} = \langle \phi_k(x,y), \zeta_i(x,y) \rangle_{\Omega_1} + \langle \phi_k(x,y), \zeta_i(x,y) \rangle_{\Omega_2} \quad (9)$$

Yukarıdaki kısımlandırmaya göre Ω_1 sınır değerlerin bağımsız bir biçimde seçildiği domen, Ω_2 ise bu domeni Ω domenine tamamlayan kısım olsun. $\Omega_1 = (x,y) \in \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ olarak tanımlansın, yani sınırdan kontrolün giriş noktaları fiziksel domeni köşeleri olarak seçilmiş oldu. Dolayısıyla elde edeceğimiz dinamik modelin 4 girişi olacaktır ve bunlar γ_{pq} ($p,q \in \{0,1\}$) ile gösterilecektir. Sadece

$(x,y)=(0,0)$ noktasından uygulanan uyarı (yani γ_{00}) ile elde edilen çözüm $u^{00}(x,y,t)$ ile gösterilecek ve bu duruma ilişkin diğer girişler sıfır varsayılacaktır. Bu şartlar için elde edilen enstantanelere UOA tekniği uygulanıp (6) denkleminde verilen sonlu toplam oluşturulabilir. Bu işlem diğer girişler için de tekrarlanırsa, tam çözüm (10) denklemindeki gibi olur.

$$u(x, y, t) = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 u^{pq}(x, y, t) = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{i=1}^M \alpha_i^{pq}(t) \phi_i^{pq}(x, y) \quad (10)$$

Dikkat edilmelidir ki sistem doğrusal olmasaydı girdileri ayrı ayrı işlemek mümkün olmazdı. Bu yüzden tartışılan yöntem doğrusal olmayan sistemlerin sadece tek girişli olanları için kullanılabilir. Yukarıdaki çözüm, (11) denkleminde verildiği gibi bilinen gerçeklerle birlikte kullanılabilir bir hale sokulabilir ve düzenlemelerle (12) denklemi kolayca elde edilebilir. Eğer (0,0) girişi için bulduğumuz bu ilişki genelleştirilirse (13) denklemindeki ifade elde edilir.

(9) denklemine göre (8) ile verilen ifade kısımlandırılabilir, ve (13) denklemini ortaya çıkan sonuç içerisinde kullanılırsa her bir uyarı konfigürasyonuna karşı düşen dinamik sistem (14) denkleminde verildiği gibi elde edilir. A^{00} matrisinin hesabı (15) denkleminde ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned} u(0,0,t) &= u^{00}(0,0,t) \\ &= \gamma_{00}(t) \\ &= \sum_{i=1}^M \alpha_i^{00}(t) \phi_i^{00}(0,0) \\ &= \alpha_k^{00}(t) \phi_k^{00}(0,0) + \sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i^{00}(t) \phi_i^{00}(0,0) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k^{00}(t) \phi_k^{00}(0,0) \zeta_k^{00}(0,0) &= \gamma_{00}(t) \zeta_k^{00}(0,0) - \\ &\sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i^{00}(t) \phi_i^{00}(0,0) \zeta_k^{00}(0,0) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k^{00}(t) \phi_k^{00}(p,q) \zeta_k^{00}(p,q) &= \gamma_{pq}(t) \zeta_k^{00}(p,q) - \\ &\sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i^{00}(t) \phi_i^{00}(p,q) \zeta_k^{00}(p,q) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\dot{\alpha}_k^{00}(t) = \sum_{i=1}^M A_{ki}^{00} \alpha_i^{00}(t) + c^2 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \gamma_{pq}(t) \zeta_k^{00}(p,q) \quad (14)$$

$$A_{ki}^{00} = c^2 \langle \phi_k^{00}(x,y), \zeta_i^{00}(x,y) \rangle_{\Omega} - c^2 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \phi_i^{00}(p,q) \zeta_k^{00}(p,q) \quad (15)$$

Görüldüğü üzere, $\underline{\gamma} = (\gamma_{00} \ \gamma_{01} \ \gamma_{10} \ \gamma_{11})^T$ şeklinde tanımlamak suretiyle aşağıdaki durum uzayı modeli, sistemi tanımlayan ve otonom olmayan ADD kümesini tasvir eder.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\alpha}}^{00}(t) &= A^{00} \underline{\alpha}^{00}(t) + B^{00} \underline{\gamma}(t) \\ u^{00}(x, y, t) &= \underline{C}^{00}(x, y) \underline{\alpha}^{00}(t) \end{aligned} \quad (16)$$

Yukarıdaki sistemde $B_{ki}^{00} = c^2 \zeta_k^{00}(p, q)$ ve $i=2p+q+1$ dir, $\underline{C}^{00}(x, y)$ vektörü iki boyutlu taban fonksiyonlarının verilen bir (x, y) noktasındaki hesabından elde edilir ve sistem M adet durum değişkenine 4 adet girişe sahiptir. Bu işlem her bir giriş için tekrarlanırsa (16) denklemindeki gibi dört ayrı sistem oluşacak ve KDD çözümü (10) denklemindeki ifade ile hesaplanabilecektir.

Burada belirtilmesinde fayda olan bir nokta termal yayılım parametresindeki olası bir kesinsizliğin (16) denklemini ne şekilde etkileyeceğinin çok açık biçimde görülebmesidir.

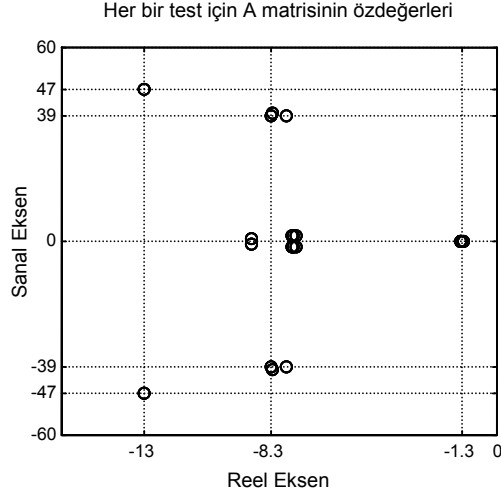
4 Nümerik Sonuçlar

Yukarıda anlatılan yaklaşım kullanılarak iki boyutlu termal sistemi ifade eden KDD Crank-Nicholson yöntemi ile nümerik olarak çözülmüştür (Bkz. [11]). Çözüm 5 milisaniye adım aralığı ile gerçekleştirilmiş ve ilk değerler sıfır alınmıştır. Termal yayılım parametresi olarak $c = 0.4$ seçilmiş ve nümerik çözüm x -ekseni ve y -ekseni üzerinde alınan $N_x=N_y=25$ nokta ile oluşturulan ızgara üzerinde oluşturulmuştur. Benzetim 1 saniyelik bir süre için yapılmış ve verilen değerlere göre 201 enstantane elde edilmiştir. Bunlardan doğrusal olarak örneklennmiş $N=21$ tanesi kullanılarak tartışılan model geliştirme yordamı uygulanmıştır. Her ne kadar nümerik çözümden elde edilen tüm enstantaneler kullanılabilir olsa da işlemsel karmaşıklığın azaltılması amacıyla UOA yöntemi ile bunların bir alt kümesi kullanılabilir ve bu, enstantaneler yöntemi (*method of snapshots*) olarak bilinmektedir, [1-2].

Benzetimlerde her bir sınır değer etkisi (kontrol girişi) ayrı ayrı işlenmiştir. Farklı bazı uyarılarla her bir duruma ait çözümler elde edilmiş ve UOA yöntemi ile uzaysal taban fonksiyonları bulunmuş, ve (16) denklemindeki sistemin detayları elde edilmiştir. Farklı test sinyalleri için bu değerler küçük farklılıklar gösterdiğinden dolayı her bir girişte farklı durumları gözönüne almak gerekliliği doğmuştur. Test işaretleri olarak kullanılan giriş fonksiyonları (17) denkleminde verilmiş ve her biri 4 kontrol girişi (fiziksel domenin her bir köşesi) için ayrı ayrı çalışılmıştır.

$$\begin{aligned} \gamma_{pq}(t) &= 0.1 + 2 \exp(-6t) \sin(8\pi t) & \gamma_{pq}(t) &= 1 - \exp(-6t) \\ \gamma_{pq}(t) &= \sin(2\pi t) & \gamma_{pq}(t) &= t \end{aligned} \quad (17)$$

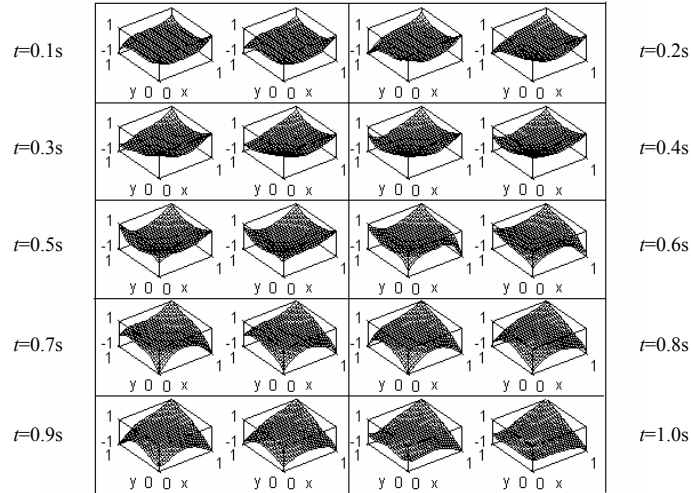
21 kip içerisinde ilk beş ($M=5$) kip kullanılmış ve (17) ifadesinde yer alan sınır değerler için ortalama olarak %99.95 oranında veri enerjisi muhafaza edilmiştir (veri enerjisi $E = \frac{(\sum_{i=1}^M \lambda_i)}{(\sum_{i=1}^N \lambda_i)}$ ile tanımlanmaktadır). Farklı sınır işaretleri için özdeş olmayan ancak benzer olan dinamiklerin ortaya çıkacağı Şekil 1'den de görülmektedir.



Şekil 1. Termal sistem herhangi bir köşesinden uyarıldığında ortaya çıkan ADD sisteminin A matrisi her bir uyarı noktası ve her bir uyarı işareti için benzer özdeğerlere sahip olmaktadır.

Bütün testler tamamlandığında (10) denkleminde verilen ifade kullanılabilir. Burada elde edilen sonuçları görselleştirmek amacıyla (18) denkleminde verilen sınır değerleri aynı anda uygulanarak tam çözümün ne şekilde oluşacağı incelenmiş ve sonuçlar Şekil 2’de verilmiştir.

$$\begin{aligned} \gamma_{00}(t) &= \sin(2\pi t) & \text{ve} & & \gamma_{10}(t) &= \text{sgn}(\sin(2\pi t)) \\ \gamma_{01}(t) &= -\sin(3\pi t) & & & \gamma_{11}(t) &= 1 - \exp(-6t) \end{aligned} \quad (18)$$

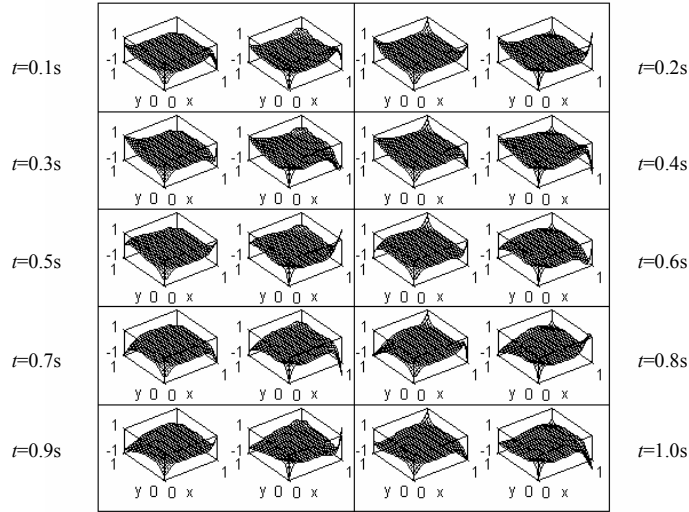


Şekil 2. (18) denkleminde verilen sınır değerleri için elde edilen çözümün $t=0.1, 0.2, \dots, 1.0$ saniyelerindeki karşılaştırmalı görünüşleri.

Yukarıdaki şekilde her bir hücrede görünen iki altgrafikten soldaki nümerik çözümle elde edilen bilgiyi, sağdaki ise sonlu boyutlu model tarafından gerçekleştirilen çözümü göstermektedir. Açıkça görülmektedir ki keyfi olarak seçilen bir sınır değer uyarıtısı için sonlu boyutlu model yeterince sağlıklı bir model teşkil etmektedir.

Eğer (18) denkleminde verilen ifadeler yerine (19) denkleminde verilen ifadeler kullanılsaydı Şekil 3'deki sonuçlar elde edilecekti. Görülmektedir ki sınır koşullarının spektral içeriği daha yüksek frekanslara kaydığında model başarısı hissedilir ölçüde düşmektedir. Bunu iki sebebe bağlıyoruz: İlki UOA tekniğinin genlikçe küçük ancak frekans olarak büyük içeriğe sahip bileşenleri sonlu sayıda kipi gözönüne alınması esnasında ihmal etmesi. İkincisi ise modeli türetirken kullandığımız sınır değerlerin (yani (17) denkleminde verilen örneklerin) test koşullarına benzerlik göstermemesidir. Çünkü bir çözümün kabul edilebilir derecede hassas olup olmadığı o çözümde kullanılan sınır uyarıtısının spektral içeriği ile yakından ilgilidir (hızlı değişen bir sınır değer için 5 milisaniyelik adım aralığı burada olduğu gibi yetersiz kalacaktır). Bu saptamanın doğruluğunu göstermek için γ_{01} girişi modeli geliştirdiğimiz işaretlere benzer seçilmiş ve beklendiği üzere $x = 0$ & $y = 1$ sınır girişi civarında yaklaşık çözüm nümerik çözüme kabul edilebilir derecede benzerlik gösterirken diğer sınırlar için bu durumdan bahsetmek mümkün olmamıştır.

$$\begin{aligned} \gamma_{00}(t) = \sin(20\pi t) & \quad \gamma_{10}(t) = \text{sgn}(\sin(14\pi t)) \\ \gamma_{01}(t) = \sin(2\pi t) & \quad \gamma_{11}(t) = -\sin(30\pi t) \end{aligned} \quad \text{ve} \quad (19)$$



Şekil 3. (19) denkleminde verilen sınır değerleri için elde edilen çözümün $t=0.1, 0.2, \dots, 1.0$ saniyelerindeki karşılaştırmalı görünüşleri.

5 Sonuçlar

Birçok fiziksel sistemin doğasında uzaysal süreklilikten dolayı sonsuz boyutluluk vardır. Dinamik gösterimlere geçildiğinde ise sonlu boyutlu -ve mümkün olduğu kadar basit ama gerçekçi- modellere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu çalışmada UOA yöntemi ile iki

boyutlu termal sistemin nasıl sonlu boyutlu bir sistemle nasıl modelleneceği üzerinde durulmuştur. Kontrol işaretinin otonom ADD yapısından nasıl ayrılacağı ve tam modelin geliştirilmesi için hangi şartların önem arzedeceği belirtilmiştir. Buna göre az sayıda kip kullanarak her ne kadar enerjinin muhafaza edilmesi anlamında yüksek yüzdeler elde edilebiliyorsa da bu ölçütün sınır fonksiyonlarının spektral içeriği ile de ilintili olduğu örnekle gösterilmiştir. Burada vurgulanması gereken bir nokta, sunulan yöntemin termal sistem dinamiği kullanılarak basit bir biçimde aktarılmış olmasının yanı sıra başka sistemler için de uygulanabilirliğinin olmasıdır.

Bu çalışmanın literatüre ana katkısı modellemede sınır koşullarının ayrılmasına yönelik önerisidir.

6 Teşekkür

Bu çalışma ABD Hava Kuvvetleri Araştırma Laboratuvarı (AFRL) tarafından desteklenmiştir (Anlaşma Numarası: F33615-01-2-3154). Yazarlar Prof. M. Samimy, Dr. J.H. Myatt (AFRL), Dr. J. DeBonis (NASA), Dr. M. Debiasi X. Yuan ve E. Caraballo'ya çalışma ile ilgili tartışma, görüş ve önerilerinden dolayı müteşekkirdir.

7 Kaynaklar

- [1] S.S. Ravindran, A reduced order approach for optimal control of fluids using proper orthogonal decomposition. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 34, 425-488 (2000).
- [2] H.V. Ly ve H.T. Tran, Modeling and control of physical processes using proper orthogonal decomposition. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 33, 223-236 (2001).
- [3] S.N. Singh, J.H. Myatt, G.A. Addington, S. Banda ve J.K. Hall, Optimal feedback control of vortex shedding using proper orthogonal decomposition models. *Trans. of the ASME: J. of Fluids Eng.*, 123, 612-618 (2001).
- [4] P.N. Blossey ve J.L. Lumley, Reduced-order modeling and control of near-wall turbulent flow. Proc. of the 38th Conf. on Decision and Control, 2851-2856, Phoenix, Arizona, U.S.A. (1999).
- [5] J.A. Atwell ve B.B. King, Proper orthogonal decomposition for reduced basis feedback controllers for parabolic equations. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 33, 1-19 (2001).
- [6] J.A. Atwell ve B.B. King, Computational aspects of reduced basis feedback controllers for spatially distributed systems. Proc. of the 38th Conf. on Decision and Control, 4301-4306, Phoenix, Arizona, U.S.A. (1999).
- [7] V.J. Mizel ve T.I. Seidman, An abstract bang-bang principle and time-optimal boundary control of the heat equation. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35 (4), 1204-1216 (1997).
- [8] A. Rösch, Identification of nonlinear heat transfer laws by optimal control. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 15 (3-4), 417-434 (1994).
- [9] R.F. Curtain ve H.J. Zwart, An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory, Springer-Verlag, New York, 184-189 (1995).
- [10] M. Krstic, On global stabilization of Burgers' equation by boundary control, *Systems and Control Letters*, (37) 123-141 (1999).
- [11] S.J. Farlow, Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Dover Publications Inc., New York, 317-322 (1993).