

# SINIRDAN VE DOMENDEN UYARILAN BİR BOYUTLU BURGERS DENKLEMİ İÇİN MODEL İNDİRGEME

Mehmet Önder Efe

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü  
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi  
Söğütözü Cad. No 43, TR-06530 Söğütözü, Ankara

e-posta: onderefe@ieee.org

Anahtar sözcükler: Modelleme, Burgers Denklemi, Uyumlu Ortogonal Ayrışım

## ABSTRACT

*This paper presents the low dimensional modeling of the Burgers equation, which is a one-dimensional nonlinear Partial Differential Equation (PDE). The spatial continuity, nonlinearity and the availability of space-continuous and boundary excitations are the difficulties associated with the problem. The motivation of carrying out such a study is to demonstrate that a numerical technique can be utilized for reconstructing the essential behavior of the PDE dynamics. The simulations justify the theoretical claims of the paper.*

## 1. GİRİŞ

Termal difüzyon, sıvı ve gazların akışı, elastisite gibi birçok fiziksel olay Kısmi Diferansiyel Denklemlerle (KDD) ifade edilmekte ve olay uzayda sürekli bir domen üzerinde cereyan etmektedir. Domen içerisindeki davranış KDD tarafından belirlenmekte, sınır koşulları ise haricen uygulanarak KDD çözümüne etki etmektedir. Bazı uygulamalarda KDD ile tasvir edilen bir sistemin kontrolü istenmekte ve bazı performans ölçütlerinin önceden belirlenen bazı uzaysal koordinatlarda gözlenmesi istenmektedir. Bu durumlarda klasik kontrol kuramının yöntemlerini kullanmak sistem modeli KDD olduğu için çok zorlaşmakta, sistemin Adi Diferansiyel Denklemlerle (ADD) ifade edilen indirgenmiş bir modeline ihtiyaç duyulmaktadır. Bir fiziksel ısı taşınım ortamının belli bir noktasındaki sıcaklığın istenen bir profili izlemesi [1]; bir aerodinamik sistemin belli bir noktasındaki basınç değişimlerinin alçak geçiren nitelikte olması [2]; veya bükülebilir bir Euler-Bernoulli çubuğunun belli bir noktasındaki titreşimlerin istenen özellikleri sağlaması [3], bu alanda verilebilecek tipik örneklerdendir.

Bu bildiride Burgers denklemi ile ifade edilen dinamiğe model indirgeme yolu ile ADD modeli geliştirilmektedir. Burger denklemi Navier-Stokes denklemleri ile aynı tipte nonlineer terim içermektedir. Bu sebeple Burgers denklemi model indirgemedede yöntem geliştirmek için iyi bir örnek teşkil etmektedir.

Burgers denklemi geçmişte modelleme ve sınırdan kontrol amaçları için kullanılmış, başarılı sonuçlar elde edilmiştir, [4-6]. Bu çalışmada kullanılan modelde, KDD içerisinde açıkça var olan uyarı terimi eklenmiş, bu terimle sınır uyarılarının bir arada olduğu durumlarda indirgenmiş modelin performansı değerlendirilmiştir.

Bildirinin genel düzeni şu şekildedir: 2. bölümde Uyumlu Ortogonal Ayrışım (UOA) tekniği anlatılmış, 3. bölümde modelleme işlemi, 4. bölümde simülasyon sonuçları ve son bölümde çalışmanın genel bulguları ve değerlendirmeler sunulmuştur.

## 2. UYUMLU ORTOGONAL AYRIŞIM

Bir  $A$  matrisinin  $A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}$  şeklinde

verilen zamanla değişen elemanları olsun.  $A(t)$  matrisinin bir  $t = t_0$  anındaki ölçümüne bir *enstantane* denir.  $K$  kümesi,  $A(t)$  matrisinin  $N$  adet  $(t_1, t_2, \dots, t_N)$  anlarında) ölçümünü içersin, ve  $K$  kümesinin elemanları arasında iç çarpım operatörü aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$\langle A(t_p), A(t_q) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A(t_p)_{ij} A(t_q)_{ij}. \quad (1)$$

Görüldüğü üzere, iç çarpım operatörü, iki enstantanenin eleman elemana çarpımından elde edilen matrisin elemanları toplamının  $N$  değerine bölümüdür.  $\Omega$  ise iç çarpım işleminin gerçekleştirildiği matris elemanları kümesini temsil eder. Burada  $A$  matrisinin, belirli bir satır-sütun boyutunda olması zorunluluğu yoktur. Buna göre UOA algoritması aşağıdaki biçimde tanımlanabilir.

**Adım 1.**  $L_{pq} = \langle A(t_p), A(t_q) \rangle_{\Omega}$  ile tanımlanan korelasyon matrisi hesaplanır. Bu matris simetrik bir matris olup,  $p$ . satır  $q$ . sütunundaki eleman,  $K$  kümesindeki ilgili enstantanelerin iç çarpımından elde edilir.  $L$  matrisi  $N \times N$  boyutlarında bir matristir.

**Adım 2.**  $L$  matrisinin  $v_i$  ile gösterilen özvektörleri ve  $\lambda_i$  ile gösterilen özdeğerleri bulunur.  $L$  matrisi reel ve simetrik olduğundan özdeğerleri reel eksen üzerinde olacaktır. Özdeğerler büyükten küçüğe doğru sıralanır ve her bir özdeğere karşı düşen özvektör de bu sırayı takip edecek şekilde yeniden düzenlenir. Burada dikkat edilmesi gereken bir gerçek  $v_i^T v_i = \lambda_i^{-1}$  ilişkisinin sağlandığıdır. Bu adımdaki işlemi tekil değer ayrışımı ile kolayca elde etmek mümkündür.  $L = V \Lambda V^T$  olacaktır, ve  $v_i$  sütun vektörü,  $V$  matrisinin  $i$ . sütununun  $\sqrt{\lambda_i}$  değerine bölünerek normalize edilmesinden elde edilecektir, ve  $i = 1, 2, \dots$ ,  $\text{rank}(L)$  için her bir  $v_i$  sütun vektörü elde edilecektir.

**Adım 3.** Ortonormal taban fonksiyonları, enstantanelerin bir karışımından elde edilir. Bunun için yukarıda elde edilen  $v_i = [v_{1i} \ v_{2i} \ \dots \ v_{Ni}]^T$  vektörü, aşağıdaki şekilde kullanılacaktır:

$$\phi_i = \sum_{k=1}^{\text{rank}(L)} v_{ki} A(t_k), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Yukarıdaki işlem,  $N$  adet ortonormal taban fonksiyonu verecek,  $\delta_{ij}$  Kronecker işlevi olmak üzere, aşağıdaki ilişkiyi doğrulayacaktır,

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle_{\Omega} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (7)$$

Bu ayrışım ile,  $A(t)$  süreci aşağıdaki gibi yazılabilecektir,

$$A(t) = \sum_{i=1}^{\text{rank}(L)} \alpha_i(t) \phi_i. \quad (8)$$

Yukarıdaki ifadede,  $\alpha_i(t)$  skaler zaman fonksiyonu,  $\phi_i$  taban fonksiyonunun  $t$  anında  $A(t)$  içerisindeki oranını belirleyen, sürekli bir fonksiyondur. (8) numaralı eşitlik, aslında  $A(t)$  sürecinin yeni bir taban kümesi üzerinde ifade edilmesi anlamını taşır.

**Adım 4.** (8) numaralı denklemi  $t = t_k$  için yazalım, ve eşitliğin her iki tarafının  $\phi_j$  ile iç çarpımını hesaplayalım,

$$A(t_k) = \sum_{i=1}^{\text{rank}(L)} \alpha_i(t_k) \phi_i. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_j, A(t_k) \rangle_{\Omega} &= \langle \phi_j, \sum_{i=1}^{\text{rank}(L)} \alpha_i(t_k) \phi_i \rangle_{\Omega} \\ &= \sum_{i=1}^{\text{rank}(L)} \alpha_i(t_k) \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{\Omega} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{\text{rank}(L)} \alpha_i(t_k) \delta_{ij} \\ &= \alpha_j(t_k) \end{aligned} \quad (10)$$

Böylelikle, bulunan taban fonksiyonları ve enstantaneleri kullanarak zaman fonksiyonlarının örnekleme anlarındaki değerlerine de erişim mümkün olmaktadır.

Kısaca özetlemek gerekirse, bu kısımda bahsedilen yaklaşım, enstantaneleri kullanarak çözümün -bazı ortogonalite özellikleri gösteren- taban fonksiyonları ve zaman fonksiyonları cinsinden sonlu sayıda toplam olarak yazılmasıdır. Bu yaklaşım literatürde Uyumlu Ortogonal Ayrışım (*Proper Orthogonal Decomposition*) olarak bilinir, [7-8].

### 3. ADD MODELİNİN ELDE EDİLMESİ

Domenden uyarı ( $\gamma_d(t)$ ) içeren Burgers denklemi  $x \in \Omega := [0, 1]$  fiziksel aralığı üzerinde tanımlanmakta ve aşağıda verilmektedir. Başlangıç koşulları  $u(x, 0) = 0$   $\forall x \in \Omega$  ile verilmekte, sınır koşulları ise  $u(0, t) = \gamma_0(t)$ ,  $u(1, t) = \gamma_1(t)$  olmakla birlikte  $\gamma_0(t)$  ve  $\gamma_1(t)$  serbestçe seçilebilen sınır uyarılarıdır,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = c(x) \gamma_d(t) + \varepsilon \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \mu u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (11)$$

Denklem (8) ile verilen açılıma göre çözüm (12) deki şekilde olmalıdır, ve bu çözüm (11) ile verilen KDD'yi (13) denkleminde gösterildiği gibi sağlamalıdır.

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(x). \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \dot{\alpha}_i(t) \phi_i(x) &= c(x) \gamma_d(t) + \varepsilon \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \zeta_i(x) \\ &\quad - \mu \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(x) \alpha_j(t) \beta_j(x) \end{aligned} \quad (13)$$

Taban fonksiyonları ortogonal oldukları için, (13) denkleminde her iki tarafın  $\phi_k$  ile iç çarpımını alırsa (14) denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_k(t) &= \langle c(x), \phi_k(x) \rangle \gamma_d(t) + \varepsilon \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \langle \zeta_i(x), \phi_k(x) \rangle \\ &\quad - \mu \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_i(t) \alpha_j(t) \langle \phi_i(x) \beta_j(x), \phi_k(x) \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

Yukarıdaki denklemde iç çarpım operatörü sürekli uzay üzerinde tanımlanmakta ve uygulanmaktadır. Bir KDD sisteminin nümerik çözümü ise bir ızgara üzerinde yapılır ve ayrık değerlerden bahsedilir. Bu sebeple, kullanılan iç çarpım operatörü ızgara

üzerinde iki vektörün iç çarpımına dönüşür ve (14) denklemi, (15) denkleminde olduğu gibi yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_k(t) = & c^T \phi_k \gamma_d(t) + \varepsilon \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \zeta_i^T \phi_k \\ & - \mu \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_i(t) \alpha_j(t) (\phi_i * \beta_j)^T \phi_k \end{aligned} \quad (15)$$

Bu aşamaya gelindiğinde, belli çalışma koşulları altında bir ADD modelinin verilen bir  $M$  (kip sayısı) değeri için elde edilebileceğini görüyoruz. Oysa, yukarıdaki denklem tipi otonom yapıya sahip olup sadece kullanılan uyarılar için nümerik anlamda geçerlilik arz eder. Dolayısıyla bu aşamadan sonra yapılması gereken, serbest sınır koşullarını ifadeden ayırmak olacaktır. Bunun için  $\Omega=[0,1]$  aralığını  $N$  adet eleman içeren bir ızgara ile temsil edelim ve  $x=0$  ve  $x=1$  sınırlarına karşı düşen ızgara elemanlarını ayırarak (15) denklemini aşağıdaki gibi tekrar yazalım. Bu denklemin düzenlenmesiyle (17) deki ifade elde edilecektir.  $\phi_k^\circ$  ile gösterilen terim,  $\phi_k$  vektörünün sınır değerlere karşı düşen elemanları haricindeki elemanlarını içerir.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_k(t) = & c^T \phi_k \gamma_d(t) + \\ & \varepsilon \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \left( \zeta_i(0) \phi_k(0) + \zeta_i^\circ \phi_k^\circ + \zeta_i(1) \phi_k(1) \right) \\ & - \mu \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_i(t) \alpha_j(t) * \\ & \left( \phi_i(0) \beta_j(0) \phi_k(0) + (\phi_i^\circ * \beta_j^\circ)^T \phi_k^\circ + \phi_i(1) \beta_j(1) \phi_k(1) \right) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_k(t) = & c^T \phi_k \gamma_d(t) + \varepsilon \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \zeta_i^T \phi_k^\circ + \\ & \varepsilon \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \zeta_i(0) \phi_k(0) + \varepsilon \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \zeta_i(1) \phi_k(1) \\ & - \mu \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_i(t) \alpha_j(t) (\phi_i^\circ * \beta_j^\circ)^T \phi_k^\circ \\ & - \mu \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_i(t) \alpha_j(t) \phi_i(0) \beta_j(0) \phi_k(0) \\ & - \mu \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_i(t) \alpha_j(t) \phi_i(1) \beta_j(1) \phi_k(1) \end{aligned} \quad (17)$$

Çözümün sınırlarda da geçerli olması gerekliliğinden dolayı

$$u(0,t) = \gamma_0 = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(0) \quad (18)$$

$$u(1,t) = \gamma_1 = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(1) \quad (19)$$

Ya da diğer bir deyişle,

$$\alpha_k(t) \phi_k(0) = \gamma_0 - \sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i(t) \phi_i(0) \quad (20)$$

$$\alpha_k(t) \phi_k(1) = \gamma_1 - \sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i(t) \phi_i(1). \quad (21)$$

Bu denklemlerin kullanımı ile sınır uyarıları da açık biçimde modele katılacaktır, yani

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \zeta_i(0) \phi_k(0) = & \alpha_k(t) \zeta_k(0) \phi_k(0) + \\ & \sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i(t) \zeta_i(0) \phi_k(0) \\ = & \left( \gamma_0 - \sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i(t) \phi_i(0) \right) \zeta_k(0) + \\ & \sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i(t) \zeta_i(0) \phi_k(0) \\ = & \gamma_0 \phi_k(0) - \sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i(t) \zeta_k(0) \phi_i(0) + \\ & \sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i(t) \zeta_i(0) \phi_k(0) \\ = & \gamma_0 \phi_k(0) \\ & - \sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i(t) (\zeta_k(0) \phi_i(0) - \zeta_i(0) \phi_k(0)) \\ = & \gamma_0 \phi_k(0) \\ & - \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) (\zeta_k(0) \phi_i(0) - \zeta_i(0) \phi_k(0)) \end{aligned} \quad (22)$$

Benzer yaklaşım  $x=1$  için de aşağıdaki sonucu verecektir:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \zeta_i(1) \phi_k(1) = & \gamma_1 \phi_k(1) \\ & - \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) (\zeta_k(1) \phi_i(1) - \zeta_i(1) \phi_k(1)). \end{aligned} \quad (23)$$

Böylelikle (11) denklemindeki  $\varepsilon \partial^2 u(x,t) / \partial x^2$  teriminin indirgenmiş modele açık uyarı terimleri ile nasıl katılacağı gösterilmiş oldu. Aynı bağıntıları kullanarak şimdi de  $-\mu u(x,t) \partial u(x,t) / \partial x$  teriminin indirgenmiş modele nasıl katılacağı gösterilecek ve model bileşenleri tamamlanacaktır. Buna göre,  $x=0$  için (24) denklemi elde edilecek,  $x=1$  için ise (25) denklemindeki bileşenler ortaya çıkacaktır.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_i(t) \alpha_j(t) \phi_i(0) \beta_j(0) \phi_k(0) \\ = & \phi_k(0) \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(0) \sum_{j=1}^M \alpha_j(t) \beta_j(0) \\ = & \gamma_0 \phi_k(0) \sum_{j=1}^M \alpha_j(t) \beta_j(0) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_i(t) \alpha_j(t) \phi_i(1) \beta_j(1) \phi_k(1) \\ & = \gamma_1 \phi_k(1) \sum_{j=1}^M \alpha_j(t) \beta_j(1) \end{aligned} \quad (25)$$

(22)-(25) denklemlerinde elde edilen terimlerin biraraya getirilmesiyle (26) denklemindeki model elde edilecektir.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_k(t) &= c^T \phi_k \gamma_d(t) + \\ & \varepsilon \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \left( \zeta_i^T \phi_k - \zeta_k(0) \phi_i(0) - \zeta_k(1) \phi_i(1) \right) \\ & - \mu \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_i(t) \alpha_j(t) \left( \phi_i^\circ * \beta_j^\circ \right)^T \phi_k^\circ + \\ & \gamma_0(t) \phi_k(0) \left( \varepsilon - \mu \sum_{j=1}^M \alpha_j(t) \beta_j(0) \right) + \\ & \gamma_1(t) \phi_k(1) \left( \varepsilon - \mu \sum_{j=1}^M \alpha_j(t) \beta_j(1) \right) \end{aligned} \quad (26)$$

Yukarıdaki modelin detaylarının anlaşılabilmesi için durum vektörünü  $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_M]^T$  ile tanımlayalım. Buna göre model yapısı (27) denkleminde verildiği gibi olacak ve model tasarımcı tarafından seçilen bir  $M \leq \text{rank}(L)$  adet ADD'den müteşekkil olacaktır.

$$\dot{\alpha} = A\alpha - B(\alpha) + C\gamma_d + (D - E\alpha)\gamma_0 + (F - G\alpha)\gamma_1 \quad (27)$$

Burada görünen terimler aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$(A)_{ki} = \varepsilon \left( \zeta_i^T \phi_k - \zeta_k(0) \phi_i(0) - \zeta_k(1) \phi_i(1) \right) \quad (28)$$

$$B = [B_1 \ B_2 \ \dots \ B_M]^T \quad (29)$$

$$(B_k)_{ij} = \mu \left( \phi_i^\circ * \beta_j^\circ \right)^T \phi_k^\circ \quad (30)$$

$$(C)_k = c^T \phi_k \quad (31)$$

$$(D)_k = \varepsilon \phi_k(0) \quad (32)$$

$$(E)_{kj} = \mu \phi_k(0) \beta_j(0) \quad (33)$$

$$(F)_k = \varepsilon \phi_k(1) \quad (34)$$

$$(G)_{kj} = \mu \phi_k(1) \beta_j(1) \quad (35)$$

$\gamma_d(t)$  ile gösterilen domenden uyarı terimi ile sınırlarda bağımsız olarak seçilebilen sınır uyarılarının enterferansını engellemek için  $c(x)$  ile gösterilen fonksiyon sınırlarda sıfır olacak şekilde seçilir.

Buraya kadar sunulan bilgi bir KDD sisteminin sonlu boyutlu bir modele dönüştürülmesinde izlenecek nümerik yolun tasviri idi. Bir sonraki kısımda sayısal bir örnek verilecek, modelin özellikleri üzerinde durulacaktır.

#### 4. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Simülasyonlarda  $\Omega$  aralığı üzerinde eşit aralıklarla seçilmiş  $N = 100$  ( $\Delta x = 1/99$ ) elemanla ızgara oluşturulmuş ve KDD Crank-Nicholson yöntemi ile çözülmüştür. Bunun sebebi, seçilen yöntemin nümerik olarak kararlı olması ve uygulamasının kolaylığıdır. KDD  $T = 1.024$  saniyelik süre boyunca  $\Delta t = 0.001$  saniye adım büyüklüğü ile  $\gamma_d(t) = 0.2 \sin(2\pi 50t(1-t)(t-0.5))$  ve  $\gamma_1(t) = \sin(2\pi 15t(1-t))$  sinyalleri kullanılarak  $\varepsilon = \mu = 1$  bilinen süreç parametreleriyle çözülmüştür.  $\gamma_0(t)$  sinyali olarak sıfır ortalamalı,  $3.3435e-5$  varyanslı, genellikle  $\pm 0.01$  arasında değişen bir gürültü sinyali seçilmiştir. Böylelikle, KDD üç farklı uyarı tarafından etkilenmektedir. Simülasyonlarda  $c(x) = x(1-x)$  fonksiyonu seçilmiş, 1024 anlık çözümden lineer olarak 128 enstantane alınmış ve UOA algoritması uygulanmıştır. İlk 5 kipin katılmasıyla ( $M = 5$ ) toplam enerjinin %99.9997 kadarını indirgenmiş modelde içerilmiş ve (27) denkleminde verilen model elde edilmiştir.

Şekil 1'de uyarı sinyallerinin Hızlı Fourier Dönüşümü (FFT) görünüşleri verilmiş, elde edilen sonuçlar ise Şekil 2'de gösterilmiştir. Sonuçlarda modelin ürettiği sinyallerin baskın kiplerde istenen değerlere çok yakın olduğu, indis numarası arttıkça kiplerde benzerliğin ortadan kalktığı görülmektedir. Bu beklenen bir durumdur. Uyarı sinyallerinin spektral zenginliği ise modelin geçerli olduğu çalışma koşullarının zenginleşmesini sağlamaktadır. Bu sebeple uyarı sinyallerinin, nümerik çözücünün ve donanımın elverdiği azami derecede çok sayıda kipi uyaracak nitelikte seçilmesi doğruluğu deneysel olarak kanıtlanmış bir gerçektir.

#### 5. SONUÇLAR

Bu çalışmada dinamiği  $u_t = \varepsilon u_{xx} - \mu u u_x + c(x) \gamma_d$  ile verilen Burgers denklemi UOA algoritması ile sonlu bir modele dönüştürülmüş ve bu modelin üretilmesi ve geçerliliği üzerine bir tartışma sunumuştur. Eşzamanlı olarak var olan harici uyarı terimleri ile UOA temelli bir modellemenin yapılabileceği gösterilmiş, yöntemin nümerik olması sebebiyle başka KDD sistemlerine de uygulanabileceği tespit edilmiştir. Bu çalışmanın literatüre katkısı KDD sistemlerinin (sonsuz boyutlu sistemlerin) ADD sistemlerine (sonlu boyutlu sistemlere) dönüştürülmesinde sınır uyarılarının nasıl ayrılacağı ve sınır uyarılarının nasıl seçilmesi gerektiğinin açıklığa kavuşturulmasıdır. Bu anlamda, sonuçların kuramsal bilgilerle uyumlu olduğu görülmektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] Efe, M.Ö. ve Özbay, H. Multi-Input Dynamical Modeling of Heat Flow with Uncertain Diffusivity Parameter, MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING OF DYNAMICAL SYSTEMS, Vol.9, no.4, pp.437-450, 2003.
- [2] Yan, P., Debiassi, M., Yuan, X., Caraballo, E., Efe, M.Ö., Özbay, H., Samimy, M., DeBonis, J., Camphouse, R.C., Myatt, J.H., Serrani, A., ve Malone, J., Controller Design for Active Cavity Flow, 42nd AIAA AEROSPACE SCIENCES MEETING AND EXHIBIT, January 5-8, Reno, Nevada, U.S.A., 2004 (Paper # AIAA 2004-0573).
- [3] Liang, J., Chen, Y. ve Guo., B.-Z., A New Boundary Control Method for Beam Equation With Delayed Boundary Measurement Using Modified Smith Predictors, PROC. OF THE 42nd IEEE CONF. ON DECISION AND CONTROL, Maui, Hawaii, pp.809-814 2003.
- [4] Vedantham, R., Optimal Control of the Viscous Burgers Equation Using an Equivalent Index

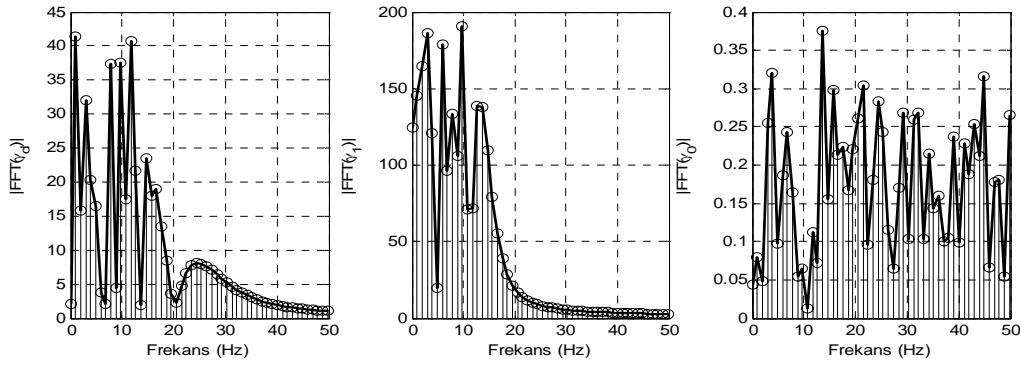
Method, JOURNAL OF GLOBAL OPTIMIZATION, Vol. 18, pp.255-263, 2000.

- [5] Liu, W.-J., ve Krstic , M., Backstepping Boundary Control of Burgers Equation with Actuator Dynamics, SYSTEMS AND CONTROL LETTERS, Vol. 41, pp.291-303, 2000.

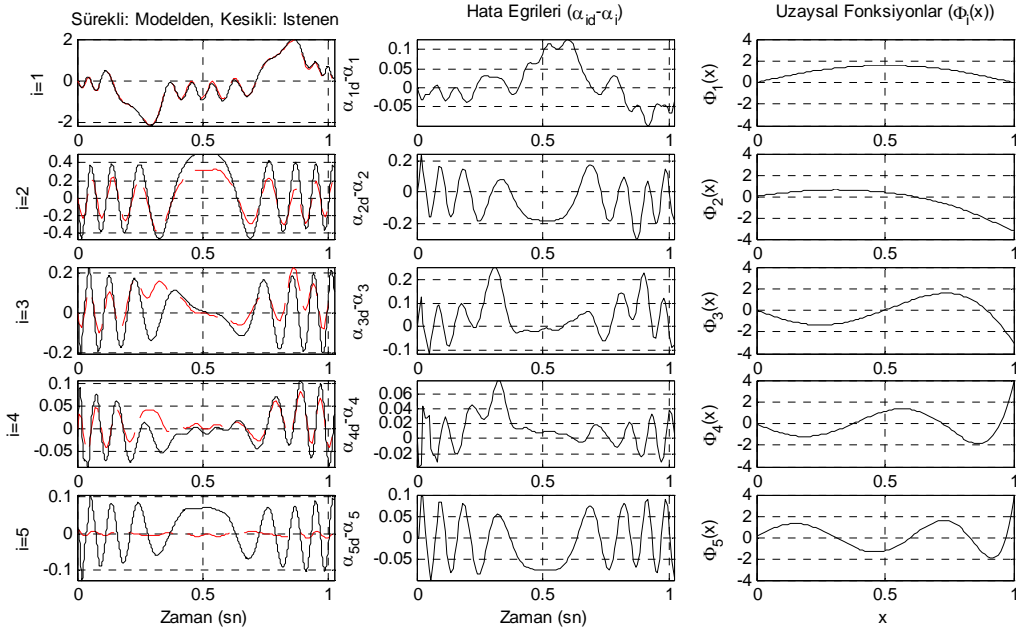
[6] Efe, M.Ö., ve Özbay, H., Low Dimensional Modeling and Dirichlet Boundary Controller Design for Burgers Equation, INTERNATIONAL JOURNAL OF CONTROL, Vol.77, Iss.10, pp.895-906, 2004.

[7] Ravindran, S. S., A Reduced Order Approach for Optimal Control of Fluids Using Proper Orthogonal Decomposition, INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS, Vol. 34, pp.425-488, 2000.

[8] Ly, H.V., ve Tran, H.T., Modeling and Control of Physical Processes Using Proper Orthogonal Decomposition, MATHEMATICAL AND COMPUTER MODELLING OF DYNAMICAL SYSTEMS, Vol.33, pp. 223-236, 2001.



Şekil 1: Simülasyonlarda kullanılan uyarıların spektral görünüşleri



Şekil 2: Olması gereken (Kırmızı kesikli) ve (27) denklemindeki model tarafından üretilen (Siyah sürekli) sinyaller, hata eğrileri ve UOA ile elde edilen uzaysal fonksiyonlar