

AYRIŞIM TEKNİKLERİ VE MODELLEME

Mehmet Önder Efe

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
Söğütözü Cad. No:43, TR-06530 Ankara, Türkiye
onderefe@ieee.org

ÖZET: Modal analiz, dinamik sistemler kuramının önemli unsurlarından biridir. Mühendislik eğitiminin en temel yöntemlerinden biri olan Fourier dönüşümü, zaman sinyallerinin spektral kompozisyonunu veren bir modal analiz yaklaşımıdır. Bu çalışmada Kısmi Diferansiyel Denklemler (KDD) ile ifade edilen sistemlerin çözümlerindeki baskın modların elde edilmesi üzerinde durulmakta, bunun için Tekil Değer Ayırımı (TDA) ve Uyumlu Ortogonal Ayırım (TDA), öğretici bir dille ele alınmaktadır. Bu çalışmanın katkısı, giderek yaygınlaşan uzayda sürekli sistemlerin kontrolüne yönelik modellerin elde edilmesinde kullanılan temel yöntemlerin örneklerle tanıtmasıdır.

1. GİRİŞ

Zamana bağlı bir $f(t)$ işaretinin Fourier dönüşümü

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \text{ ifadesi ile, ters}$$

$$\text{dönüşüm ise } f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) \exp(j\omega t) d\omega$$

ifadesi ile hesaplanır. $|F(j\omega)|$ büyüklüğü, frekans ekseninde çizdirildiğinde her bir frekansta okunan değer, o frekanstaki sinüzoid bileşenin (modun) $f(t)$ işareti içerisinde ne ölçüde baskın (ya da çekinik) olduğunu ifade edecektir. Eğer $f(t)$ işareti, satır ve sütunlarındaki elemanları zamanla değişen bir matris ise (örneğin bir video bilgisi) izlenmesi gereken yol benzer ayrışım tekniklerinin uygulanması olacaktır.

Bu bildiri bahsedilen türde veriler için kullanılabilen TDA ve UOA teknikleri üzerinde durmaktadır. TDA yöntemi, görüntü işlemeden kontrol teorisine kadar birçok temel alanda uygulanagelen ve lineer cebirin en kullanışlı ayrıştırma tekniklerinden biridir, (Zhou, 1998; Haykin, 1994; Strang, 1988). UOA ise temelde TDA yöntemine benzemekle birlikte işlemsel karmaşıklık açısından TDA yönteminden daha avantajlıdır. Yakın geçmişte akış modelleme konusunda sıkça kullanılmış olan UOA tekniği, KDD ile ifade edilen sistemlerde model indirgeme konusunda önemli bir algoritmik aşamayı teşkil eder,

(Ravindran, 2000; Ly 2001; Singh, 2001; Blossey, 1999; Atwell, 1999; Atwell, 2001; Gügercin, 2004; Lassaux, 2003; Farlow, 1993).

Bu çalışmanın Türkçe literatüre katkısı, KDD sistemleri üzerinde çalışma yapan araştırmacılara model indirgeme aşamasında kullanılan iki temel yöntemi ve bunların analitik ve algoritmik detaylarını didaktik bir biçimde tanıtmaktır. Model indirgeme konusunda detaylı bir araştırma Gügercin (2004) kaynağında, Arnoldi metotlarını kullanan bir diğer akış modelleme çalışması ise Lassaux (2003) kaynağında mevcuttur.

2. TEKİL DEĞER AYRIŞIMI (SINGULAR VALUE DECOMPOSITION)

Bir A matrisi verilsin. Tekil değer ayrışımı, A matrisini aşağıda verilen çarpım şeklinde ifade eder,

$$A = U \Sigma V^T \quad (1)$$

Burada, $U_{n \times n}^T U_{n \times n} = I_{n \times n}$, $V_{m \times m}^T V_{m \times m} = I_{m \times m}$ ve $\Sigma_{n \times m}$ ise asal köşegeninde büyükten küçüğe sıralı ve pozitif elemanlar bulunduran, köşegen haricindeki elemanları sıfır olan bir matristir. Köşegen üzerinde sıfırdan farklı eleman sayısı, A matrisinin rankına eşit olup, aşağıdaki gibi bir yapı sergiler,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix}_{r \times r}, \quad (2)$$

$$r \leq \min(n, m).$$

Bu noktada sorulması gereken soru, U , V ve Σ matrislerinin nasıl elde edileceğidir. Bunun için önce V matrisini bulalım:

$$\begin{aligned} A^T A &= (U \Sigma V^T)^T U \Sigma V^T \\ &= V \Sigma^T (U^T U) \Sigma V^T \\ &= V \Sigma^2 V^T \\ &= V^T \Lambda V \end{aligned} \quad (3)$$

Görüldüğü gibi, V matrisi $A^T A$ matrisinin özvektörlerinden oluşmakta, köşegen yapıya sahip Λ matrisi ise özdeğerleri taşımaktadır. Benzer şekilde U matrisi de aşağıda gösterilen şekilde bulunabilir,

$$\begin{aligned} A A^T &= U \Sigma V^T (U \Sigma V^T)^T \\ &= U \Sigma (V^T V) \Sigma^T U^T \\ &= U \Sigma^2 U^T \\ &= U^T \Lambda U \end{aligned} \quad (4)$$

Bu matrisleri elde etmek için Matlab ortamında $[U, S, V] = \text{svd}(A)$ yazmak yeterlidir. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ olsun. } A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, A A^T = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olacaktır. $A^T A$ ve $A A^T$ matrislerinin özdeğerleri $|\sigma^2 I - A^T A| = 0$ (ya da $|\sigma^2 I - A A^T| = 0$) denklemlerinin çözümünden elde edilir. Bu değerler $\sigma_1^2 = 8$ ve

$$\sigma_2^2 = 2 \text{ dir. Buna göre } \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} \text{ denklemleri çözümlenmelidir. Bu}$$

denklemler birçok çözüm öngörecektir ancak bunlar içerisinde $\left\| \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{bmatrix} \right\| = 1$, $\left\| \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{bmatrix} \right\| = 1$ ve $V^T V = I$

ifadelerini sağlayan çözüm aranan çözümdür. Yani $V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ sonucu kolaylıkla elde edilecektir.

Benzer şekilde, U matrisi için aynı özdeğerler kullanılacak, ve $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = 8 \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix}$ ile

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} \text{ denklemlerinin, } \left\| \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} \right\| = 1,$$

$$\left\| \begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{bmatrix} \right\| = 1, U^T U = I \text{ koşulları altında çözümünden}$$

elde edilen $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sonucuna ulaşılabilecektir. Buna göre, A matrisi şu şekilde yazılabilir $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Bu yöntemde

$\sigma_1 = \sqrt{8}$ ve $\sigma_2 = \sqrt{2}$ değerleri, A matrisinin tekil değerleridir. Yukarıda tartışılan yöntemin, modellemede kullanımı 4. Kısım'da ele alınacaktır.

3. UYUMLU ORTOGONAL AYRIŞIM (PROPER ORTHOGONAL DECOMPOSITION)

Yukarıda tartışılan örnekteki A matrisinin

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \text{ şeklinde verilen zamanla}$$

değişen elemanları olsun. $A(t)$ matrisinin bir $t = t_0$ anındaki ölçümüne bir *enstantane* denir. K kümesi, $A(t)$ matrisinin N adet (t_1, t_2, \dots, t_N) anlarında ölçümünü içersin, ve K kümesinin elemanları arasında iç çarpım operatörü aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$\langle A(t_p), A(t_q) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A(t_p)_{ij} A(t_q)_{ij}. \quad (5)$$

Görüldüğü üzere, iç çarpım operatörü, iki enstantanenin eleman elemana çarpımdan elde edilen matrisin elemanları toplamının N değerine bölümüdür. Ω ise iç çarpım işleminin gerçekleştirildiği matris elemanları kümesini temsil eder. Burada A matrisinin, 2. Kısımda ele alındığı gibi 2×2 olması zorunluluğu yoktur. Buna göre UOA algoritması aşağıdaki biçimde tanımlanabilir.

Adım 1. $L_{pq} = \langle A(t_p), A(t_q) \rangle_{\Omega}$ ile tanımlanan korelasyon matrisi hesaplanır. Bu matris simetrik bir matris olup, p . satır q . sütunundaki eleman, K kümesindeki ilgili enstantanelerin iç çarpımından elde edilir. L matrisi $N \times N$ boyutlarında bir matristir.

Adım 2. L matrisinin v_i ile gösterilen özvektörleri ve λ_i ile gösterilen özdeğerleri bulunur. L matrisi reel ve simetrik olduğundan özdeğerleri reel eksen üzerinde olacaktır. Özdeğerler büyükten küçüğe doğru sıralanır ve her bir özdeğere karşı düşen özvektör de bu sırayı takip edecek şekilde yeniden düzenlenir. Burada dikkat edilmesi gereken bir gerçek $v_i^T v_i = \lambda_i^{-1}$ ilişkisinin sağlandığıdır. Bu adımdaki işlemi TDA ile kolayca elde etmek mümkündür. $L = V \Lambda V^T$ olacaktır, ve v_i sütun vektörü, V matrisinin i . sütununun $\sqrt{\lambda_i}$ değerine bölünerek normalize edilmesinden elde edilecektir, ve $i = 1, 2, \dots, \text{rank}(L)$ için her bir v_i sütun vektörü elde edilecektir.

Adım 3. Ortonormal taban fonksiyonları, enstantanelerin bir karışımından elde edilir. Bunun için yukarıda elde edilen $v_i = [v_{1i} \ v_{2i} \ \cdots \ v_{Ni}]^T$ vektörü, aşağıdaki şekilde kullanılacaktır:

$$\phi_i = \sum_{k=1}^{\text{rank}(L)} v_{ki} A(t_k), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Yukarıdaki işlem, N adet ortonormal taban fonksiyonu verecek, δ_{ij} Kronecker işlevi olmak üzere, aşağıdaki ilişkiyi doğrulayacaktır,

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle_{\Omega} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (7)$$

Bu ayrışım ile, $A(t)$ süreci aşağıdaki gibi yazılabilecektir,

$$A(t) = \sum_{i=1}^{\text{rank}(L)} \alpha_i(t) \phi_i. \quad (8)$$

Yukarıdaki ifadede, $\alpha_i(t)$ skalar zaman fonksiyonu, ϕ_i taban fonksiyonunun t anında $A(t)$ içerisindeki oranını belirleyen, sürekli bir fonksiyondur. (8) numaralı eşitlik, aslında $A(t)$ sürecinin yeni bir taban kümesi üzerinde ifade edilmesi anlamını taşır.

Adım 4. (8) numaralı denklemi $t = t_k$ için yazalım, ve eşitliğin her iki tarafının ϕ_j ile iç çarpımını hesaplayalım,

$$A(t_k) = \sum_{i=1}^{\text{rank}(L)} \alpha_i(t_k) \phi_i. \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_j, A(t_k) \rangle_{\Omega} &= \langle \phi_j, \sum_{i=1}^{\text{rank}(L)} \alpha_i(t_k) \phi_i \rangle_{\Omega} \\ &= \sum_{i=1}^{\text{rank}(L)} \alpha_i(t_k) \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{\Omega} \\ &= \sum_{i=1}^{\text{rank}(L)} \alpha_i(t_k) \delta_{ij} \\ &= \alpha_j(t_k) \end{aligned} \quad (10)$$

Böylelikle, bulunan taban fonksiyonları ve enstantaneleri kullanarak zaman fonksiyonlarının örnekleme anlarındaki değerlerine de erişim mümkün olmaktadır.

Bu yöntemi aşağıdaki süreç için örneklendirelim: $A(t_1) = [1 \ 2]$, $A(t_2) = [1 \ 1]$ ve $A(t_3) = [1 \ -1]$. Görüldüğü gibi $N = 3$, ve $A(t_k)$ enstantaneleri 1×2 matrislerdir. Buna göre

$$L = \begin{bmatrix} 5/3 & 1 & -1/3 \\ 1 & 2/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.5533 \\ -0.3320 \\ 0.1107 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3873 \\ 1.1619 \end{bmatrix}, \text{rank}(L)=2$$

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -0.5533[1 \ 2] - 0.3320[1 \ 1] + 0.1107[1 \ -] \\ &= [-0.7746 \ -1.5493] \\ \phi_2 &= 0[1 \ 2] + 0.3873[1 \ 1] + 1.1619[1 \ -1] \\ &= [1.5492 \ -0.7746] \end{aligned} \quad (12)$$

Taban fonksiyonları arasındaki ortonormallik özelliği aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle_{\Omega} &= ((-0.7746)^2 + (-1.5493)^2) / 3 = 1 \\ \langle \phi_2, \phi_2 \rangle_{\Omega} &= ((1.5492)^2 + (-0.7746)^2) / 3 = 1 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{\Omega} &= \langle \phi_2, \phi_1 \rangle_{\Omega} \\ &= (-0.7746 * 1.5492 + (-1.5493) * (-1.5493)) / 3 \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \langle \phi_1, A(t_1) \rangle_{\Omega} &= \alpha_1(t_1) = \\ &= (-0.7746 * 1 - 1.5493 * 2) / 3 = -1.2911 \\ \langle \phi_1, A(t_2) \rangle_{\Omega} &= \alpha_1(t_2) = \\ &= (-0.7746 * 1 - 1.5493 * 1) / 3 = -0.7746 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\langle \phi_2, A(t_1) \rangle_{\Omega} = \alpha_2(t_1) = (1.5492 * 1 - 0.7746 * 2) / 3 = 0$$

$$\langle \phi_2, A(t_2) \rangle_{\Omega} = \alpha_2(t_2) = (1.5492 * 1 - 0.7746 * 1) / 3 = 0.2582$$

Böylelikle $A(t_k) = \alpha_1(t_k) \phi_1 + \alpha_2(t_k) \phi_2$, $k = 1, 2$ olduğu kolayca gösterilebilir. Bu aşamada $A(t_3)$ 'e ne olduğu, yöntemin bu enstantaneyi neden gözardı ettiği sorulmalıdır. Cevap açıktır, $A(t_3) = -2A(t_1) + 3A(t_2)$ olması, bu enstantanenin diğerlerinin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabileceğini mümkün kılar, ve bu enstantanenin UOA içerisinde kullanımının yeni bir taban fonksiyonu üretimine katkı sağlamayacağı anlamına gelir.

Kısaca özetlemek gerekirse, bu kısımda bahsedilen yaklaşım, enstantaneleri kullanarak çözümün -bazı ortogonal özellikleri gösteren- taban fonksiyonları ve zaman fonksiyonları cinsinden sonlu sayıda toplam olarak yazılmasıdır. Bu yaklaşım literatürde Uyumlu Ortogonal Ayrışım (*Proper Orthogonal Decomposition*) olarak bilinir, (Zhou, 1998; Haykin, 1994; Strang, 1988; Ravindran, 2000; Ly 2001; Singh, 2001).

4. MODELLEMEDE AYRIŞIM TEKNİKLERİ

Genel bir KDD sistemi aşağıdaki gibi verilsin,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = F\left(t, u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \dots\right) \quad (15)$$

ya da $u_t = F(t, u, u_x, u_{xx}, \dots)$.

Bu KDD, uzaysal olarak sadece x değişkenine bağlı olduğu için bir boyutlu olup, $x \in \Omega$ olduğunu, - zorunlu olmamakla birlikte- $\Omega := [0,1]$ olduğunu varsayacağız. Buna göre, $u(x, t_0)$ büyüklüğü, 2. Kısımda örneklendirilerek ele alınan, t_0 anında görüntülenen *enstantaneye* denk düşecektir. O halde, $\Omega := [0,1]$ uzayı üzerinde sonlu sayıda x noktasından okunan $u(x, t_0)$ büyüklüğü, genelliği kaybetmemek koşuluyla, bir satır vektörü olarak (ya da bir enstantane) olarak K kümesine katılır. Seçilen sınır değerler ve bir başlangıç koşulu ile Sonlu Elemanlar Yöntemi (Finite Element Method) kullanarak, KKD nin nümerik çözümü yapılabilir ve enstantaneler kümesi oluşturulabilir. Buna göre

a) Küme bir matris haline getirilir ve TDA uygulanabilir

Bu durumda

$$A = \begin{bmatrix} u(0,0) & u(\Delta x,0) & \dots & u(1,0) \\ u(0,\Delta t) & u(\Delta x,\Delta t) & \dots & u(1,\Delta t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(0,T) & u(\Delta x,T) & \dots & u(1,T) \end{bmatrix} = (U \Sigma) V^T = Q V^T$$

elde edilir. Q matrisinin i . sütunu, $\alpha_i(t)$ değişkeninin Δt aralıklarla elde edilen değerlerini, V matrisinin i . sütunu ise $\phi_i(x)$ taban fonksiyonunun Δx adım aralıkları ile hesaplanmış değerlerini gösterir. Böylelikle, (15) numaralı denklem ile verilen KDD için çözüm aşağıdaki sonlu toplam ile ifade edilebilir. Burada $M = \min(N, \text{rank}(L))$ dir;

$$u(x,t) \cong \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(x). \quad (16)$$

Bu çözümün ne oranda bilgiyi içerdiği ise $E = 100 \frac{\sum_{i=1}^M \sigma_i}{\sum_{i=1}^{\text{rank}(L)} \sigma_i}$ ölçütü ile belirlenir. E değeri %100 değerine yaklaştıkça, (16) denklemindeki çözümüm gerçek çözüme benzerliği de artar.

b) Küme elemanları UOA algoritmasına tabi tutulur

Enstantaneler kümesinden belirli bir örnekleme periyodu ile seçilen N adet enstantane ile 3. Kısımda tartışılan ayrışım tekniği uygulanır ve (8) denklemine karşılık düşen gösterilim (16) denklemindeki gibi elde edilir. Burada $\alpha_i(t)$ değişkenlerinin enstantanelerin toplandığı örnekleme periyodunun tam katlarındaki değerlerinin elde edileceği gözden kaçırılmamalıdır.

Yukarıda tartışılan yaklaşımlardan hangisinin kullanılacağı tasarımcıya kalmıştır. Her iki yol ile de (16) numaralı denklemde verilen sonlu sayıdaki terimler toplamına erişilir. Bu ifade,

$u_t = F(t, u, u_x, u_{xx}, \dots)$ için -ihmal edilebilir yaklaşıklıkta- bir çözüm ise, yerine konduğunda denklemini -ihmal edilebilir hata ile- sağlamalıdır. Buna göre,

$$\sum_{i=1}^M \dot{\alpha}_i(t) \phi_i(x) \cong F\left(t, \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(x), \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}, \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2}, \dots\right) \quad (17)$$

Yazılabilir ve her iki tarafın $\phi_k(x)$ taban fonksiyonu ile iç çarpımı alındığında aşağıdaki sonuca ulaşılır,

$$\langle \phi_k(x), \sum_{i=1}^M \dot{\alpha}_i(t) \phi_i(x) \rangle_{\Omega} \cong \langle \phi_k(x), F\left(t, \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(x), \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x}, \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2}, \dots\right) \rangle_{\Omega}$$

$$\sum_{i=1}^M \dot{\alpha}_i(t) \langle \phi_k(x), \phi_i(x) \rangle_{\Omega} \cong \langle \phi_k(x), F \rangle_{\Omega}, \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^M \dot{\alpha}_i(t) \delta_{ik} = \dot{\alpha}_k(t) \cong \langle \phi_k(x), F \rangle_{\Omega},$$

$k = 1, 2, \dots, M$ için $\dot{\alpha}_k(t) \cong \langle \phi_k(x), F \rangle_{\Omega}$ ifadesinden elde edilecek sonuç $\dot{\underline{\alpha}}(t) \cong \Psi(\underline{\alpha})$ şeklinde bir vektör diferansiyel denklem, diğer bir deyişle, bir *dinamik model* verecektir.

5. NÜMERİK BİR ÖRNEK

Bu kısımda (19) denklemini ile verilen 1 boyutlu Burgers denklemi üzerinde durulmuş, UOA yöntemi ile indirgenmiş modelin elde edilişi tartışılmıştır.

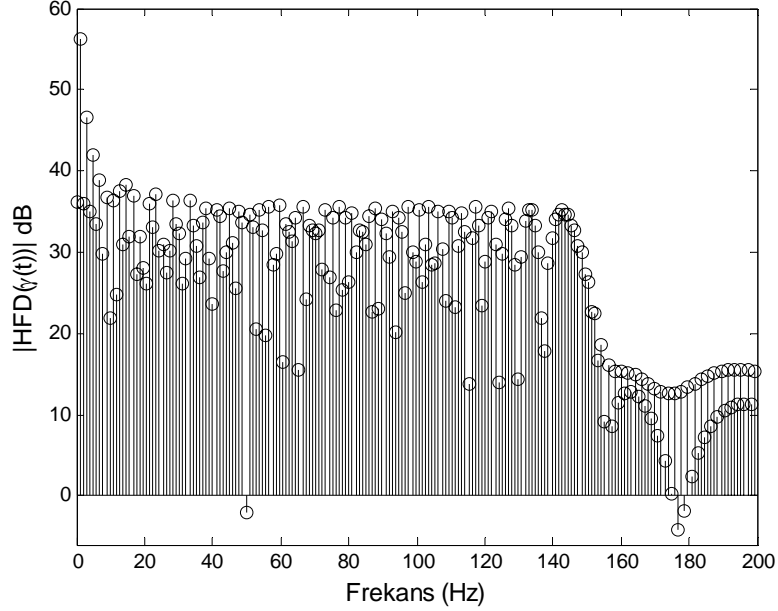
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (19)$$

Enstantaneler kümesinin elde edilmesi için yukarıda verilen KDD, $\Delta x=0.01$ aralıklarla seçilmiş bir ızgara üzerinde $x \in \Omega=[0,1]$ ve $t \in [0,1]$ domeninde çözülmüş, bu çözüm için $\Delta t=0.001$ sn zaman aralığı seçilmiştir. Her 0.01 saniyede bir örnekleme ile alınan 1×100 boyutlu vektörler enstantaneler kümesini oluşturmuş ve UOA algoritması uygulanmıştır. İndirgenmiş modelde ilk 5 ($M=5$) kip kullanılmış, ve E değeri %99.9979 olarak elde edilmiştir. KDD için $\varepsilon = 4$ değeri seçilmiş, nümerik çözüm ise Crank-Nicholson yöntemi ile elde edilmiştir, Farlow (1993). Bu bilgilere ek olarak KDD için $x=0$ sınıırı sıfır değerinde tutulmuş ve $x=1$ sınıırı model girişi olarak benimsenmiştir. Başlangıç koşulları $u(x,t)=0 \forall x \in \Omega$ olarak verilmiş, ve modelin türetiminde $\gamma(t) = \sin(2\pi 150t(1-t)) + \sin(20\pi t)$ işareti kullanılmıştır. Bu işaretin Hızlı Fourier Dönüşümü (HFD) genlik resmi Şekil 1 de gösterilmiştir.

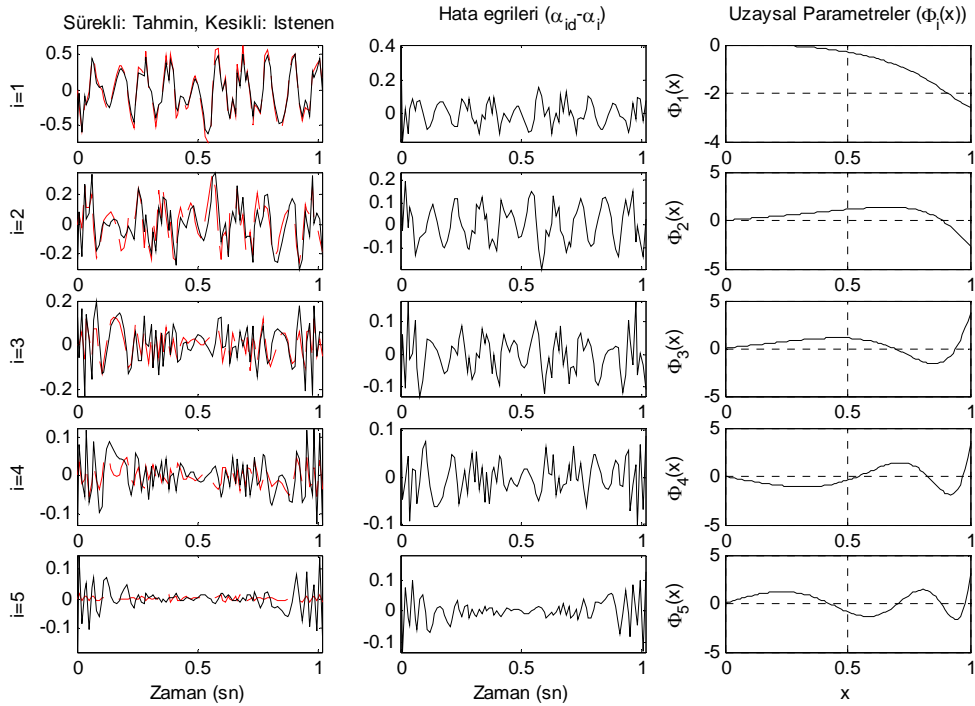
Burada, seçilen işaretin spektral görünüşünün birçok frekansta etkin olması bilinçli yapılmış bir tercihtir, ve elde edilen model, yaklaşık olarak 140 Hz

frekansına kadar geçerli bir model olacaktır. Şekil 2’de ise UOA yönteminin verdiği $\alpha_i(t)$ değerleri ile, (18) denklemindeki dinamik modelin sentezlediği $\alpha_i(t)$ değerleri karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir. Açıkça görülmektedir ki ilk üç kipe ait işaretler yeterince hassas bir biçimde sentezlenmiş, işaret baskınlığı azaldıkça sentezleme hassasiyeti de yavaş

yavaş kaybolma eğilimi göstermiştir. Bu beklenen bir sonuçtur, modelin istenen biçimde çalıştığına işaret etmektedir. Şekil 2’nin üçüncü sütununda (16) denkleminde görünen uzaysal parametreler gösterilmiştir. Bu taban fonksiyonlarının ortogonal oldukları ve bu özelliğın modellemede kullanıldığı unutulmamalıdır.



Şekil 1. Model türetiminde kullanılan işaretin HFD genlik resmi



Şekil 2. UOA yönteminin verdiği $\alpha_i(t)$ değerleri ile, (18) denklemindeki dinamik modelin sentezlediği $\alpha_i(t)$ değerleri (ilk sütun), aralarındaki fark (ikinci sütun) ve taban fonksiyonları (üçüncü sütun)

Yukarıda elde edilen sonuçların aynısı TDA yöntemi ile de elde edilebilirdi, ancak UOA ile karşılaştırıldığında işlemsel karmaşıklık daha fazla olurdu.

6. SONUÇLAR

Bu çalışmada TDA ve UOA yöntemleri örnekli bir biçimde tanıtılmış, KDD sistemlerinin indirgenmiş modellerinin elde edilmesinde nasıl kullanılacakları anlatılmış ve UOA ile Burgers denklemi üzerinde bir nümerik örnek gösterilmiştir. Varılan sonuç, ayrışım teknikleri ile elde edilen dinamik modellere kontrol teorisinin iyi tanımlanmış tasarım yaklaşımlarının kolayca uygulanabileceği, modellerin ise buna elverecek ölçüde hassas olabileceğidir.

7. TEŞEKKÜR

Bu çalışma ABD Hava Kuvvetleri Araştırma Laboratuvarı (AFRL) tarafından desteklenmiştir (Anlaşma Numarası: F33615-01-2-3154). Yazar Prof. H. Özbay, Prof. M. Samimy, Dr. J.H. Myatt (AFRL), Dr. J. DeBonis (NASA), Dr. M. Debiasi X. Yuan ve E. Caraballo'ya çalışma ile ilgili tartışma, görüş ve önerilerinden dolayı müteşekkirdir.

8. REFERANSLAR

Atwell, J.A. ve B.B. King, (1999) "Computational aspects of reduced basis feedback controllers for spatially distributed systems," Proc. of the 38th Conf. on Decision and Control, 4301-4306, Phoenix, Arizona, U.S.A.

Atwell, J.A. ve B.B. King, (2001) "Proper orthogonal decomposition for reduced basis feedback controllers for parabolic equations,"

Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, v.33, pp.1-19.

Blossey, P.N. ve J.L. Lumley, (1999) "Reduced-order modeling and control of near-wall turbulent flow," Proc. of the 38th Conf. on Decision and Control, pp.2851-2856, Phoenix, Arizona, U.S.A.

Farlow, S.J., *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, (1993) Dover Publications Inc., New York, pp.317-322.

Gügercin, S. ve A.C. Antoulas, (2004) "A survey of model reduction by balanced truncation and some new results," *Int. Journal of Control*, v.77, No.8, pp.748-766.

Haykin, S., *Neural Networks*, (1994), Macmillan College Publishing Company.

Lassaux, G. ve K. Willcox, (2003) "Model reduction for active control design using multiple-point Arnoldi methods," AIAA Paper 2003-0616, 41st Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Reno, NV.

Ly, H.V. ve H.T. Tran, (2001) "Modeling and control of physical processes using proper orthogonal decomposition," *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, v.33, pp.223-236.

Ravindran, S.S., (2000) "A reduced order approach for optimal control of fluids using proper orthogonal decomposition," *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, v.34, pp.425-488.

Singh, S.N., J.H. Myatt, G.A. Addington, S. Banda ve J.K. Hall, (2001) "Optimal feedback control of vortex shedding using proper orthogonal decomposition models," *Trans. of the ASME: J. of Fluids Eng.*, v.123, pp.612-618.

Strang, G., *Linear Algebra and Its Applications*, (1988), International Thomson Publishing; 3rd Edition.

Zhou, K., (1998), *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall.