

Kesir Dereceli Kayan Kipli Denetim

Mehmet Önder Efe

Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Söğütözü, Ankara
onderefe@etu.edu.tr

Özetçe

Kesir dereceli sistemler ve denetim kuramının kesir dereceli sistemler üzerinde uygulamaları son yılların ilgi çeken konularındandır. Kesir dereceli doğrusal sistemler için doğrusal denetleyiciler literatürde bazı örnekleri olan, gün geçtikçe olgunlaşan konular olmakla birlikte, denetlenecek sistemin ya da denetim yaklaşımının doğrusal olmayışı bu alanda ilgi çekici vasfını sürdürmektedir. Bu bildiride doğrusal bir kesir dereceli sisteme kayan kipli denetim yaklaşımı uygulanmaktadır. Sistem çıkışının gürültülü olduğu durum ele alınmış, bir gözleyici ile sistem durumları elde edilmiş, kararlılık için kesir dereceli durumda koşulların ne olması gerektiği verilmiş ve kesir dereceli durumda erişim kuralının tamsayı halde neye karşı düştüğü grafik olarak gösterilmiştir.

1. Giriş

Ortaya çıkışı 1695 yılına kadar giden kesir dereceli üretim ve integrasyonun son yıllarda, özellikle son on yılda birçok alanda uygulamalarının geliştirilmesi, otomatik kontrol alanında da yankı bulmuş, kesir dereceli PID denetleyiciler başta olmak üzere birçok yaklaşım bu farklı alanda tekrar formüle edilmiştir. Bunlarda gözleyici tasarımı ve kayan kipli denetimin doğrusal bir kesir dereceli sisteme uygulanması bu bildirinin asıl konusudur. Özüde türev elemanını göstermek için kullandığımız $\mathbf{D}=d/dt$ gibi bir operatörün yerine $\beta \in \mathfrak{R}^+$ olmak üzere $\mathbf{D}^\beta=d^\beta/dt^\beta$ gibi bir operatörün kullanılması ve bu durumda davranışı betimleyen matematiksel yaklaşımın ne gibi farklılıklar göstereceğini irdeleyen bilim dalı olan kesir dereceli sistemlerle ilgili bazı temel kaynaklar [1-3] ile verilen kaynaklardır. Oldham ve Spanier [1], konunun temel matematik yönünü verirken Podlubny [2] kesir dereceli diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerinde durmakta, Das [3] ise bu sistemlerin mühendislikteki bazı karşılıkları üzerine yoğunlaşmaktadır.

Kesir dereceli sistemlerin denetim kuramı açısından ele alındığı bazı önemli bilgiler [4-5] kaynaklarında hem sürekli zaman sistemleri hem de ayrık zaman sistemleri için incelenmiştir. Türev ve integratör derecelerinin kesirli olduğu durumda elde edilen kesir dereceli PID denetleyicileri kullanılarak gerçekleştirilen kararlılaştırma [6], bu denetleyicilerin parametrelerinin belirlenmesinde Ziegler-Nichols benzeri kuralların türetildiği bir diğer çalışma ise [7] kaynağında mevcuttur. Kesir dereceli sistemlerin zaman domeninde gerçeklemeleri [8] kaynağında sunulmuş olup Sonlu Dürtü Cevaplı üreticiler ise [9] kaynağında ele alınmıştır. Benzer şekilde tam dereceli denetim kuramının önemli konularından birisi olan Kalman süzgecinin kesir dereceli sistemler için tasarımı [10] kaynağında sunulan bir diğer önemli katkıdır. Doğrusal sistemler kuramında ele alınan temel konulardan denetlenebilirlik, gözlenebilirlik, durum geçiş

matrisinin hesabı, kararlılık için gerekli koşullar, sürekli hal başarımı ve frekans cevabı analizi [12] kaynağında sunulmuş olup, gözleyici tabanlı denetim sistemi tasarımı ise [13] kaynağında ele alınmıştır.

Yukarıda sunulan literatür araştırması daha genişletilebilir ancak bu bildirinin yukarıda verilen bulgulardan temel farkı doğrusal olmayan bir denetim kuralını kesir dereceli sistemlerde uygulaması ve elde edilen sonuçların kolay anlaşılabilirlik açısından tam dereceli durumda görselleştirilmesidir.

Bu bildiri şu şekilde düzenlenmiştir: İkinci kısımda kesir dereceli sistemler ve temel nitelikler hakkında bilgiler verilmiş, üçüncü kısımda gözleyici tabanlı kayan kipli denetleyici tasarımı ele alınmış, benzetim çalışmaları ve sonuçlar da takip eden bölümlerde sunulmuştur.

2. Kesir Dereceli Sistemler

Kesir dereceli türev için Caputo tanımı $0 < \beta < 1$ olmak üzere (1) ifadesinde verilmektedir. Bu tanıma göre $n-1 < \beta < n$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun β kesirli türevinin Laplace dönüşümü (2) ifadesiyle verilen gibidir. Burada $\Gamma(\beta)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\beta-1}dt$ ile tanımlanan Gamma fonksiyonudur.

$$\frac{d^\beta}{dt^\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\beta} d\tau \quad (1)$$

$$\int_0^\infty e^{-st} \mathbf{D}^\beta f(t) dt = s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\beta-k-1} f^{(k)}(0) \quad (2)$$

Denetim kuramı açısından bakılırsa tüm başlangıç koşullarının sıfır olması halinde \mathbf{D}^β operatörünün Laplace domeninde karşılığı s^β olmakta, $a_k, b_k \in \mathfrak{R}$ ve $\alpha_k, \beta_k \in \mathfrak{R}^+$ olmak üzere (3) ifadesiyle verilen kesir dereceli diferansiyel denklemlerli bir sistemin transfer fonksiyonu biçimindeki ifadesi (4) denkleminde verilmektedir.

$$(a_n \mathbf{D}^{\alpha_n} + a_{n-1} \mathbf{D}^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 \mathbf{D}^{\alpha_0}) y(t) = (b_m \mathbf{D}^{\beta_m} + b_{m-1} \mathbf{D}^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 \mathbf{D}^{\beta_0}) u(t) \quad (3)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}} \quad (4)$$

Bu çalışmada durum uzayı gösteriminde verilen kesir dereceli sistemler ele alınmaktadır. Kesir dereceli sistemlerin durum uzayı gösterimleri (5) denkleminde verilmekte, sistemin Laplace domeninde ifade edilen transfer fonksiyonu

(6) denkleminde, homojen durumda ($u=0$) sistemin çözümü (7) denkleminde, durum uzayı sisteminin zaman domeni çözümü (8) denkleminde, denetlenebilirlik ve gözlenebilirlik koşulları ise sırasıyla (9) ve (10) denklemlerinde verilmektedir. Bu bilgilerle ilgili ayrıntılı açıklamalara [12] kaynağından erişilebilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\beta \mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} + Du \end{aligned} \quad (5)$$

$$H(s) = \mathbf{C}(s^\beta \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + D \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^{k\beta}}{\Gamma(1+k\beta)} \right) \mathbf{x}(0) \\ &= E_\beta(\mathbf{A}t^\beta) \mathbf{x}(0) \\ &= \Phi(t) \mathbf{x}(0) \end{aligned} \quad (7)$$

Yukarıda $E_\beta(\mathbf{A}t^\beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t^\beta)^k}{\Gamma(\beta k + 1)}$ ile tanımlanan Mittag-Leffler matris fonksiyonudur.

$$y(t) = \mathbf{C}\Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{C} \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau + Du(t) \quad (8)$$

$$\mathbf{W}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{pmatrix}, \text{rank}(\mathbf{W}_c) = n \quad (9)$$

$$\mathbf{W}_o = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix}, \text{rank}(\mathbf{W}_o) = n \quad (10)$$

Son olarak bu kısımda kararlılık açısından sağlanması gereken koşullardan söz etmekte yarar vardır. Kapalı çevrim sisteminin transfer fonksiyonu oluşturulup karakteristik denklem elde edildiğinde, denklemin kökleri λ_i ile gösterilirse kararlılık için bu köklerin (11) ifadesindeki koşulu sağlamaları beklenmektedir. Tam dereceli durum için bu koşulun köklerin sol yarı s -düzleminde olmasını söylediğine dikkat edilmelidir.

$$|\arg(\lambda_i)| > \beta \frac{\pi}{2} \quad (11)$$

3. Gözleyici Tabanlı Kayan Kipli Denetim

3.1 Gözleyici Tasarımı

Bu çalışmada durum uzayı sistemi (12) denkleminde verildiği gibidir ve bu sistemin durum vektörünü elde etmek için (13) denklemleri ile verilen gözleyici kullanılacaktır.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\beta \mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\beta \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (13)$$

$\xi := \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$ olarak tanımlanırsa (14) ifadesi elde edilir. Bu şu anlama gelmektedir, L vektörü öyle seçilmelidir ki $\mathbf{A}-\mathbf{L}\mathbf{C}$ matrisinin özdeğerleri (11) denkleminde verilen koşulu sağlasın. Bu koşulu sağlayan önceden seçilmiş özdeğerler ($\mathbf{A}^\top, \mathbf{C}^\top$) çifti için kutup yerleştirme yöntemlerinden birini kullanarak elde edilebilir.

$$\xi^{(\beta)} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})\xi \quad (14)$$

Bu noktada belirtilmelidir ki (14) denkleminin kararlılık koşulunu sağlaması gözleyici durumlarının sistem durumlarını $t^{-\beta}$ hızında yakalama eğiliminde olacaktır, bu durum [13] kaynağında aşırı-yavaş davranış olarak nitelendirilmekte ve bu davranışın herhangi bir üstel ($\exp(-t)$) davranıştan çok daha yavaş olacağı vurgulanmaktadır.

3.2 Kesir Dereceli Kayan Kipli Denetleyici Tasarımı

Bu kısımda ilk olarak gözleyici kullanmaksızın kesir dereceli kayan kipli denetleyicinin nasıl elde edileceği üzerinde durulacaktır. Bu nedenle sistemin referans girişi vektörü \mathbf{r} ile gösterilsin ve durum izleme hatası $\mathbf{e} := \mathbf{x} - \mathbf{r}$ ile tanımlansın. Kayma yüzeyi (15) denkleminde verilen biçimde seçilsin.

$$\sigma = \mathbf{G}\mathbf{e} \quad (15)$$

Dikkat edilmelidir ki kesir dereceli durumda da $\sigma=0$ ile tanımlanan dinamiğin kararlı olması zorunluluğu vardır. Bir denetim kuralı hata vektörünü $\sigma=0$ ile tanımlanan alt uzayda kalmaya zorlarsa bu durumda klasik anlamda kayan kipli denetim elde edilmiş olur. Bu nedenle (15) ifadesinde verilen anahtarlama fonksiyonunun β dereceli türevine bakalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\beta \sigma &= \mathbf{G}\mathbf{D}^\beta \mathbf{e} \\ &= \mathbf{G}\mathbf{D}^\beta \mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{D}^\beta \mathbf{r} \\ &= \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{B}u - \mathbf{G}\mathbf{D}^\beta \mathbf{r} \end{aligned} \quad (16)$$

Erişme kuralı yaklaşımına göre seçilecek denetim kuralı (17) ifadesini sağlarsa hata vektörü $\sigma=0$ ile tanımlanan alt uzaya doğru hareket eder.

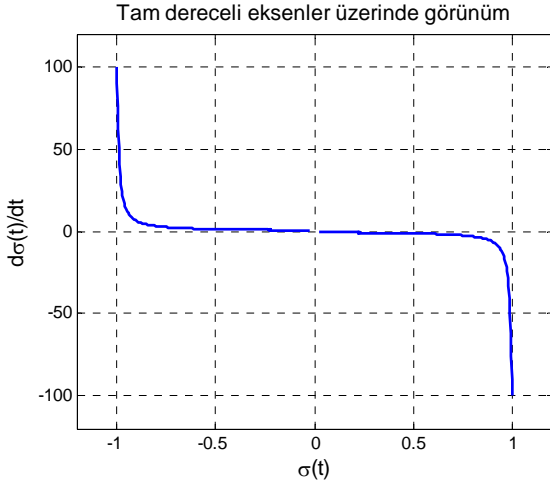
$$\mathbf{D}^\beta \sigma = -\eta \text{sgn}(\sigma), \quad \eta > 0 \quad (17)$$

O halde (18) ifadesindeki denetim kuralının bu sonucu doğuracağı açıktır.

$$u = (\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1} \left(-\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{x} - \eta \text{sgn}(\sigma) + \mathbf{G}\mathbf{r}^{(\beta)} \right) \quad (18)$$

Tam dereceli durumda $\dot{\sigma} = -\eta \text{sgn}(\sigma)$ ifadesinin gerçekleşmesi, $\sigma > 0$ iken azalan, $\sigma < 0$ iken artan bir değişim öngördüğü için σ değişkeni sonunda sifıra yaklaşır. Erişme kuralının $\mathbf{D}^\beta \sigma = -\eta \text{sgn}(\sigma)$ olduğu durumda ise aynı açıklamayı yapmak zordur. Ancak bu durumda da erişimin gerçekleşeceğini göstermek için Şekil 1'de bu ifadenin $\sigma(0)=1$ ve $\sigma(0)=-1$ değerleri için çözümlerinde yörüngeleri elde

edilmiş, bulunan $\sigma(t)$ çözümlerinin tam dereceli türevi alınarak $\sigma(t)$ ye karşı $d\sigma(t)/dt$ biçiminde seyri gösterilmiştir. Böylelikle kesir dereceli durumda da $\sigma=0$ ile betimlenen alt uzayın bir çeker olduğu gösterilmiş olmaktadır.



Şekil 1. $\mathbf{D}^\beta \sigma = \eta \operatorname{sgn}(\sigma)$ ifadesinin iki farklı $\sigma(0)$ için çözümünden elde edilen yörüngenin tam dereceli türevine göre seyri.

(12) ile verilen durum uzayı sisteminin aşağıdaki gibi denetlenebilir kanonik yapıda olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\beta x_i &= x_{i+1} \quad i=1,2,\dots,n-1 \\ \mathbf{D}^\beta x_n &= \sum_{k=1}^n a_k x_k + bu \end{aligned} \quad (19)$$

Bu sistem için referans girişleri de aşağıdaki gibi seçilsin

$$\mathbf{D}^\beta r_i = r_{i+1} \quad i=1,2,\dots,n-1 \quad (20)$$

Şu halde $e = e_1 = x_1 - r_1$ olarak tanımlanır ve anahtarlama fonksiyonunun (21) ifadesindeki gibi seçimi $\sigma = 0$ ile tanımlanan dinamik için (11) denkleminde verilen kararlılık koşulunun otomatik olarak sağlanmasını mümkün kılar.

$$\sigma = (\mathbf{D}^\beta + \lambda)^{n-1} e \quad \lambda > 0 \quad (21)$$

Yukarıdaki ifade daha açık biçimiyle (22) ifadesindeki gibi yazılabilir, ve bu ifadenin β dereceli türevinin hesabı (23) denkleminde verilen düzenlemelerle elde edilebilir.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \lambda^{n-1-k} \mathbf{D}^{k\beta} e \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \lambda^{n-1-k} e_{k+1} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\beta \sigma &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \lambda^{n-1-k} e_{k+2} \\ &= \mathbf{D}^\beta e_n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} \lambda^{n-1-k} e_{k+2} \\ &= \mathbf{D}^\beta x_n - \mathbf{D}^\beta r_n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} \lambda^{n-1-k} e_{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k x_k + bu - \mathbf{D}^\beta r_n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} \lambda^{n-1-k} e_{k+2} \end{aligned} \quad (23)$$

$\mathbf{D}^\beta \sigma = \eta \operatorname{sgn}(\sigma)$ erişme kuralının benimsenmesi, (23) denkleminde u girişinin yalnız bırakılmasıyla (24) denklemindeki denetim kuralının elde edilmesini sağlar.

$$u = \frac{1}{b} \left(-\eta \operatorname{sgn}(\sigma) + \mathbf{D}^\beta r_n - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} \lambda^{n-1-k} e_{k+2} + \sum_{k=1}^n a_k x_k \right) \quad (24)$$

Literatürde sıkça başvurulan bir yöntem, işaret fonksiyonunun yerine (25) denkleminde verilen yaklaşımın kullanılması ve böylelikle $s=0$ civarında denetim sinyalinin gereksiz derecede hızlı salınımlar yapmasına engel olmaktadır.

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \approx \frac{\sigma}{|\sigma| + \delta} \quad \delta > 0 \quad (25)$$

Bu yaklaşım kayma yüzeyi etrafında bir sınır tabakası oluşturmaya denk düşer ki çatırdama etkisinin azalması gibi olumlu sonuçları vardır, [14].

Gözleyici tabanlı kayan kipli denetim için ise yukarıdaki denetim kuralı aşağıdaki biçimi alacaktır.

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\eta}{b} \frac{\sigma}{|\sigma| + \delta} + \mathbf{D}^\beta r + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b} \hat{x}_k \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} \frac{\lambda^{n-1-k}}{b} (\hat{x}_{k+2} - r_{k+2}) \end{aligned} \quad (26)$$

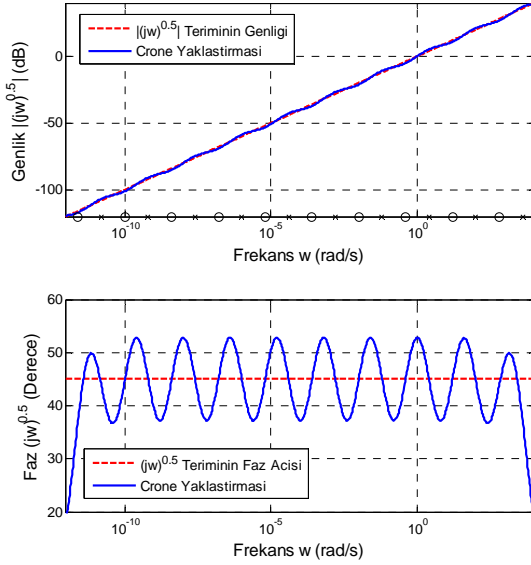
3.3 Sayısal Gerçekleme

Kesir dereceli sistemlerle ilgili en temel sorun bu operatörlerin gerçek zamanlı uygulamalar için nasıl gerçekleştirileceğidir. Bu konuda bazı sonuçlar [8] kaynağında ele alınmaktadır. Sıkça izlenen bir yöntem de bu elemanları frekans alanında tam dereceli elemanlarla yaklaşık olarak elde etmektir.

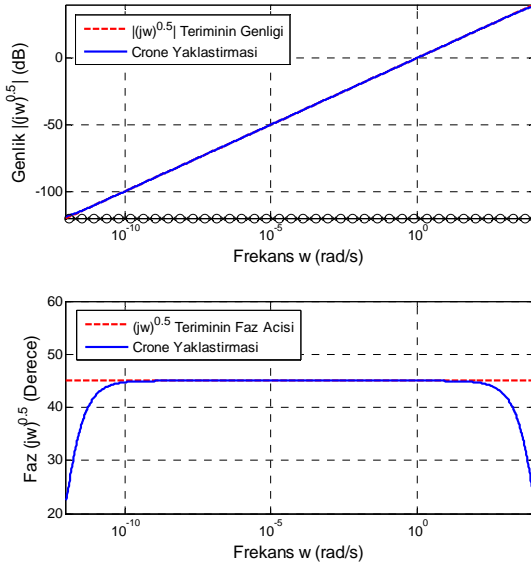
$$s^\beta \approx K \frac{\prod_{k=1}^N 1 + s/w_{pk}}{\prod_{k=1}^N 1 + s/w_{zk}} \quad (27)$$

Bu konuda sıkça kullanılan bir yaklaşım Crone yaklaşımı olup, bu yöntemle s^β terimi, (27) ifadesinde verilen biçimde bir terimle gerçekleştirilir ve K kazancı öyle ayarlanır ki $w=1$ rad/s frekansında ifadenin genliği 0 dB değerinde tutulur. Bu yordam

hangi frekans bandına yaklaştırma yapılacağını ve yaklaştırmanın derecesini kullanarak kutup ve sıfırları en uygun biçimde hesaplar. Şekil 2’de bu hesaplama ile $N=10$ ’uncu dereceden bir yaklaştırma ile elde edilen sonucu, Şekil 3’te ise $N=38$ ’inci dereceden yaklaştırma ile elde edilen genlik ve faz eğrileri verilmiştir. Her iki şekilden de anlaşılacağı üzere N sayısı arttıkça yaklaştırma başarımı artmakta, buna karşılık karmaşıklık da artmaktadır. $N=38$ seçilmesinin sebebi daha yüksek dereceli yaklaşımlar için nümerik hassasiyetin görünür biçimde yaklaştırma başarısını etkiliyor olmasıdır. Her iki şekilde de algoritmanın yerleştirdiği kutup ve sıfırlar yatay eksen üzerine işaretlenmiştir.



Şekil 2. $w_{\min}=1e-12$ rad/s, $w_{\max}=1e4$ rad/s, $N=10$ ile Crone yaklaştırması.



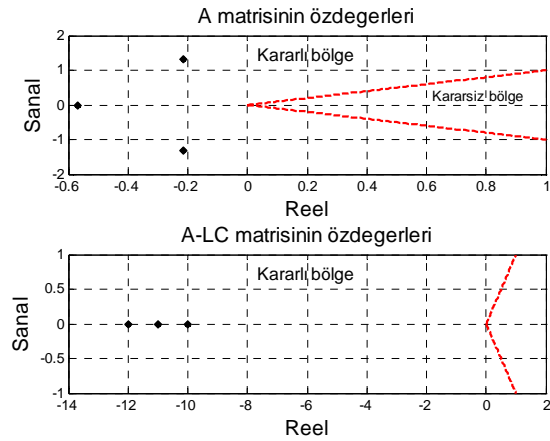
Şekil 3. $w_{\min}=1e-12$ rad/s, $w_{\max}=1e4$ rad/s, $N=38$ ile Crone yaklaştırması.

4. Benzetim Çalışmaları

Bu çalışmada ele alınan sistem için **A**, **B** ve **C** matrisleri (28) ifadesinde verilmiştir.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0] \quad (28)$$

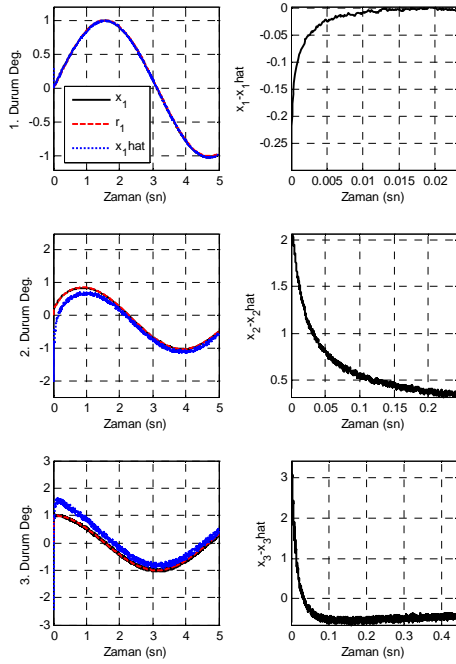
Gözleyici için **L** matrisi $\mathbf{L} = [32 \ 328 \ 927]^T$ şeklinde seçilmiş ve kararlılık açısından Şekil 4’teki durum elde edilmiştir. Bu seçim **A-LC** matrisinin özdeğerlerini sırasıyla -10 , -11 ve -12 değerlerine atamış olup bu değerler de kararlılık koşulunu sağlamak şartı altında rasgele seçilmişlerdir.



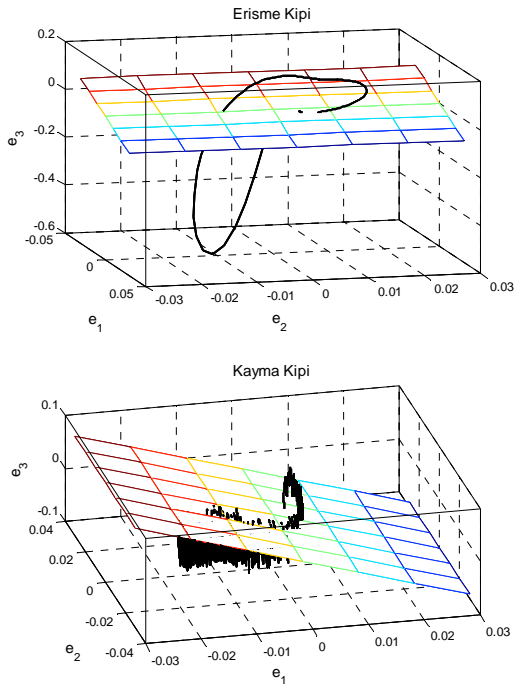
Şekil 4. **A** matrisinin (üstte) ve **A-LC** matrisinin özdeğerlerinin (altta) karmaşık düzleme yerleşimi.

Benzetimlerde $\eta = 1$, $\lambda = 1$ seçilmiş ve sistemin değişkenleri iki farklı referans üzerinden incelenmiştir. İlkinde $r(t)=\sin(t)$ seçilmiş ve Şekil 5’teki sonuçlar elde edilmiştir. Şeklin sol sütununda her bir durum değişkenine karşı düşen referans sinyali ($r_i(t)$), bu değişkenle ilişkili durum değişkeni ($x_i(t)$) ve gözleyicinin sağladığı bilgi ($\hat{x}_i(t)$) gösterilmiş, sağ sütunda ise $x_i(t) - \hat{x}_i(t)$ farkları çizdirilmiştir. Matignon vd. [13] tarafından da vurgulandığı gibi gözleyici durumları istem durumlarına yaklaşmaya çalışmakta, çıkışa eklenen gözlem gürültüsüne rağmen $t^{-\beta}$ hızında bir yaklaşma gözlemlenmektedir. Şekil 2’de gösterilen erişme biçiminin bu örnekte gerçekleşmesi Şekil 6’da üst çizgede, gözlemlenen kayma kipi alt çizgede verilmiştir.

Aynı deney $r(t)$ sinyalinin trapezoid bir sinyal olduğu durumda tekrarlanmış ve Şekil 7-8 ile verilen sonuçlar elde edilmiştir. Erişme ve kayma kiplerinin en iyi görüneceği açılardan bakılarak verilen üç boyutlu yörüngelerden açıkça görülmektedir ki tasarlanan gözleyici tabanlı kayan kipli denetleyici sıfırdan farklı başlangıç koşullarının belirlendiği sıfırdan farklı $\sigma(0)$ değerini sıfıra, yani kayma yüzeyine doğru yönlendirmekte, kayma yüzeyi ise tanımlı gereği kararlı bir alt uzay olduğu için kendi üzerine düşen hata vektörünü orijine doğru yönlendirmektedir.



Şekil 5. Sinüzoidal referans sinyali için gözlemlenen sistem cevabı ve gözleyici başarımı.



Şekil 6. Sinüzoidal referans sinyali için faz uzayında erişme kipi ve kayma kipinin gerçekleşmesi

Kesir dereceli denetleyicinin ürettiği giriş sinyali her iki durum için de Şekil 9'da gösterilmiştir. Şeklin sol sütunundaki iki alt çizge erişme kuralının $D^\beta \sigma = \eta \operatorname{sgn}(\sigma)$ olduğu durumda denetim sinyalini göstermekte, sağ sütundaki iki alt çizge ise

işaret fonksiyonuna (27) ile verilen yaklaşırtmanın uygulanması sonucunda elde edilen denetim sinyalini göstermektedir. Açıktr ki işaret fonksiyonu burada da çatırdama etkisine sebep olmakta, bu etki işaret fonksiyonunun uygun bir biçimde yaklaşığının kullanılmasıyla ortaya çıkan sınır tabakası içerisinde bir dereceye kadar giderilebilmektedir.

Bu kısımda son olarak vurgulanması gereken konu dayanıklılık meselesidir. Bildirinin sonuçlarını belli bir belirsizlik biçimine özel kılmamak için benzetimlerde belirsizlik terimleri kullanılmamış ancak A matrisi (29) denklemindeki gibi seçilerek pek çok deneme yapılmıştır. Fikir vermesi açısından Δ_i değişkenine a_i değişkeninin %10'u kadar bozucu katıldığında sunulan sonuçlarda gözle görünür değişiklik olmadığı gözlemlenmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 + \Delta_1 & -2 + \Delta_2 & -1 + \Delta_3 \end{bmatrix} \quad (29)$$

5. Sonuçlar

Kesir dereceli türev ve integral operatörleri ile tasvir edilen dinamik sistemlerin modellenmesi ve denetimi her ne kadar son yıllarda popüler bir konu haline geldiyse de bu alanda çoğunluğu doğrusal sistemler üzerine yoğunlaşan çalışmalar yayınlanmış, kararlılık ve başarımları da bu dar alanda oldukça iyi tanımlanan konular olmuştur. Denetlenecek sistemin veya denetleyicinin doğrusal olmadığı durumda ise Lyapunov kararlılık kuramının uygulanabileceği bir çerçevede henüz tanımlanmamıştır. Bunun temel nedeni ise kesir dereceli sistemlerde çarpımın türevi için Leibniz kuralının aşağıdaki gibi genelleşmesi ve sonsuz sayıda terimin incelenmesinin gerekmesidir.

$$D^\beta (f(t)g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+k)\Gamma(1-k+\beta)} (D^k f)(D^{\beta-k} g) \quad (30)$$

Bu çalışmada denetlenecek sistem doğrusal bir sistem olarak seçilmiş bu sistem için gerçekleştirilecek bir kesir dereceli gözleyicinin nasıl elde edileceği tartışılmıştır. Gözleyiciden elde edilen durum bilgisi kayan kipli denetleyici içerisinde kullanılmış, denetim yaklaşımının durum uzayında bir çeker yarattığı gösterilmiş, bu durumun tam dereceli duruma yansımaları da grafik yoluyla gösterilmiştir.

İki benzetim örneği üzerinde durulmuş, her ikisinde de gözleyici durumlarının sistem durumlarına yaklaştığı, gözlem gürültüsünün olumsuz etkisinin giderilebildiği ve başarılı bir kayma kipinin gözlemlendiği gösterilmiştir.

Özetle, bu çalışma doğrusal sistemler için doğrusal olmayan bir denetleyici tasarımı üzerinde durmuştur.

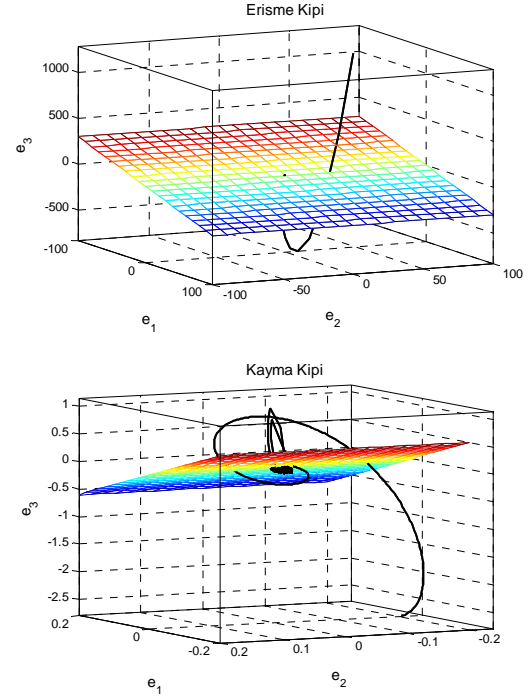
6. Teşekkür

Bu çalışma TÜBİTAK 107E137 numaralı proje ve TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi ETÜ-BAP 2006/04 kodlu proje tarafından desteklenmiştir. Yazar bildirinin değerlendirilmesinde görev alan hakemlere ve TOBB ETÜ İnsansız Hava Araçları laboratuvarına teşekkür eder.

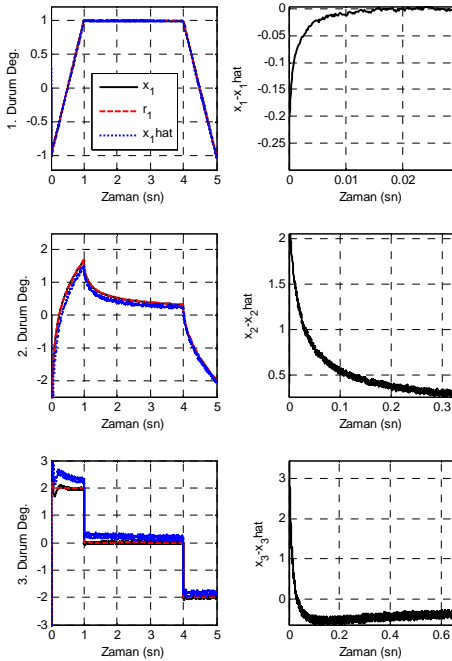
7. Kaynakça

- [1] Oldham, K.B. and Spanier, J. The Fractional Calculus, Academic Press, 1974.

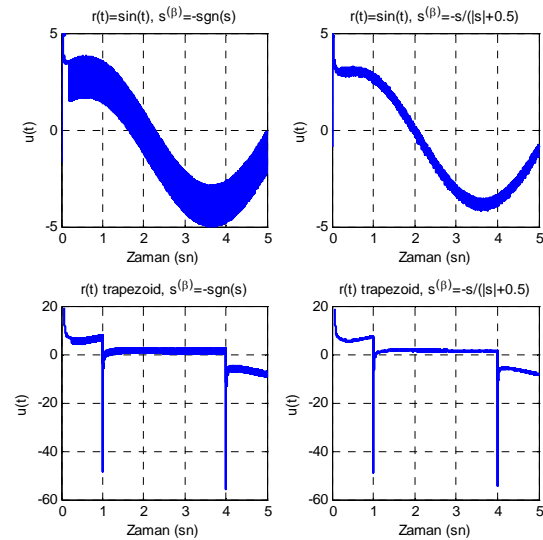
- [2] Podlubny, I., Fractional Differential Equations, Elsevier Science & Technology Books, 1st Edition, 1998.
- [3] Das, S., Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls, Springer, 1st Edition, 2008.
- [4] Ortigueira, M.D., "Introduction to Fractional Linear Systems. Part 1: Continuous Time Case," IEE Proc. Vis. Image Signal Processing, v.147, n.1, pp.62-70, 2000.
- [5] Ortigueira, M.D., "Introduction to Fractional Linear Systems. Part 2: Discrete Time Case," IEE Proc. Vis. Image Signal Processing, v.147, n.1, pp.71-78, 2000.
- [6] Hamamci, S.E., "Stabilization Using Fractional Order PI and PID Controllers," Nonlinear Dynamics, v.51, no.1-2, pp.329-343, 2007.
- [7] Valerio, D. and Sa da Costa, J., "Tuning of Fractional PID Controllers Ziegler-Nichols Type Rules," Signal Processing, v.86, pp.2771-2784, 2006.
- [8] Valerio, D. and Sa da Costa, J., "Time Domain Implementation of Fractional Order Controllers," IEE Proc. Control Theory and Appls., v.152, n.5, pp.539-552, 2005.
- [9] Tseng, C.-C., "Design of Fractional Order Digital FIR Differentiators," IEEE Signal Processing Letters, v.8, n.3, pp.77-79, 2001.
- [10] Sierociuk, D. and Dzieliński, A., "Fractional Kalman Filter Algorithm for the States, Parameters and Order of Fractional System Estimation," Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., v.16, n.1, pp.129-140, 2006.
- [12] Vinagre, B.M., Monje, C.A. and Calderon, A.J., "Fractional Order Systems and Fractional Order Control Actions," 41st IEEE Int. Conf. on Decision and Control, Las Vegas, NV, 10-13 December, pp.15-38, 2002.
- [13] Matignon, D. and d'Andera-Novel, B., "Observer Based Controllers for Fractional Differential Systems," Int. Conf. on Decision and Control, San Diego, California, pp.4967-4972, 1997.
- [14] Slotine, J.-J. E. and W. Li, Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, New Jersey, 1991.



Şekil 8. Sinüzoidal referans sinyali için faz uzayında erişme kipi ve kayma kipi gerçeleşmesi



Şekil 7. Sinüzoidal referans sinyali için gözlemlenen sistem cevabı ve gözleyici başarımı



Şekil 9. Her iki deney için de elde edilen denetim sinyalleri (sol sütun) ve bu sinyallerin (25) yaklaştırması ile başarımdan bir ölçüde ödün verilerek elde edilmiş yaklaşıkları (sağ sütun)