

DEĞİŞKEN SINIR KAZANÇLARINA SAHİP BİR ORTAMDA ISIL İLETİMİN MODELLENMESİ VE SINIRDAN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Mehmet Önder Efe*
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Söğütözü TR-06560 Ankara

ÖZET

Bu çalışmada $\Omega := \{(x,y) \mid (x,y) \in [0,1] \times [0,1]\}$ fiziksel uzayı üzerinde tanımlı ve sınırlardan uyarılan ısı akışı sistemi için model indirgeme ve optimal kontrolör tasarımı ele alınmaktadır. Ele alınan prosesin bir Kısmi Diferansiyel Denklem (KDD) ile ifade ediliyor olması model indirgemeyi zorunlu hale getirmektedir. Bu amaçla kullanılan Uyumlu Ortogonal Ayırışım (UOA) tekniği ile KDD sistemi Adi Diferansiyel Denklemlerle (ADD) ifade edilebilen bir sisteme dönüştürülmekte, sınır terimleri analitik manipülasyonla ayrılmakta, elde edilen doğrusal sistem için bir gözleyici tasarlanabilmekte ve optimal kontrolör tasarımı yapılabilmektedir. Bildiri UOA tekniğinin uygulanış biçimi ile optimal kontrolör tasarımı arasındaki ilişkileri kontrol mühendisliği açısından irdelenmekte,, modellemedeki güçlükler üzerinde durulmaktadır.

GİRİŞ

Uzayda süreklilik arz eden, ısı ve akışkan akışları gibi KDD'lerle ifade edilen sistemlerin indirgeme yoluyla modellenmesi özellikle askeri alanda potansiyel uygulamaları dolayısıyla önem kazanmıştır. KDD sisteminin lineer olduğu durumda indirgeme için birçok alternatifin mevcut olmasına karşın (Bkz. [11]), nonlinear KDD proseslerin indirgenmesinde UOA yöntemi sıklıkla kullanılmaktadır. Bu çalışmada UOA kullanarak lineer olmasına karşın iki boyutta (2D) ısı akışı modelinin nasıl indirgendığı, optimal sınır kontrolörünün tasarımı ve UOA algoritmasının parametrelerinin seçimi ile kontrol performansı arasındaki ilişkiler ele alınmaktadır.

UOA yöntemi ilk olarak Lumley, [18], tarafından türbülanslı akışların modal (kipsel) analizini yapabilmek amacıyla önerilmiş, daha sonraları Sirovich, [16], tarafından enstantaneler yöntemi ile prosedürün işlemsel karmaşıklığı azaltılmıştır. UOA yöntemi, bir akıştan elde edilen enstantanelerle akışı, belli diklik özelliklerini sağlayan zamansal ve uzaysal bileşenlere ayırıştırır. Bu ayırıştırma ile elde edilen uzaysal bilgi, akışın gerçekleştiği uzaysal domen üzerinde tanımlı ortogonal baz fonksiyonları, zamansal bilgi ise ADD'lerle ifade edilen dinamik bir sistemdir. UOA yönteminin önemli bir özelliği, ayırışımın kipsel baskınlık derecesine göre gerçekleşmesidir. Diğer bir deyişle, KDD'in çözümündeki en baskın kip ilk kip olmakta ve baskınlık derecesi kip indisi arttıkça azalmaktadır. Bu sebeptendir ki KDD sistemlerinin indirgemeye dayalı modellenmesinde UOA yöntemi sıkça kullanılmakta ve ortaya sonlu boyutlu (indirgenmiş) bir Galerkin modeli çıkmaktadır, [1-3,7].

* Doç. Dr., Bölüm Başkanı, Elektrik ve Elektronik Müh. Böl., eposta: onderefe@etu.edu.tr

Bu çalışma TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Bilimsel Araştırmalar Programı tarafından desteklenmiştir, kontrat no: ETÜ-BAP-2006/04

Algoritmik açıdan bakıldığında, KDD sistemi verilen bir başlangıç ve sınır koşulu (koşulları) için çözülür ve çözümden belli aralıklarla enstantaneler toplanır. UOA algoritması ve Galerkin izdüşümü ile KDD sisteminin davranışını tasvir eden yaklaşık bir otonom ADD modeli ve bu modele eşlik eden bir baz fonksiyonları kümesi elde edilir. Bu ADD sisteminin verilen başlangıç ve sınır koşulları altında çözümünden elde edilen bilgi, KDD sisteminin çözümünde kullanılacak zamansal bilgidir ve ne yazık ki ADD modelinin otonom olmasından dolayı bu bilgi seçilen başlangıç ve sınır koşullarına bağımlılık gösterir. Bu nedenle elde edilen ADD modelinin otonomluktan kurtarılması, yani harici uyarıların açık biçimde model ifadesinde gösterilmesi gerekmektedir. Bu çalışmada, bahsedilen problemin nasıl giderileceği üzerinde de durmakta ve modelin benzer sınır koşulları altında geçerliliğini koruduğu da vurgulanmaktadır. Yazar ku konuda daha önce bir boyutlu Burgers denklemi için [4], ve 2 boyutlu ısı akışı için [5], benzer yöntemleri uygulamış ancak sınır uyarılarını noktasal kabul etmiştir. Bu çalışmada ise sınır koşullarının değişken sınır kazançlarına sahip bir ortam üzerinden sınırlar boyunca sistemi etkilediği varsayılmış, böylelikle son derece zengin ısı dağılımlar elde edilmiş ve UOA algoritmasının ne derecede başarı gösterebileceğini sınavacak bir modelleme problemine ulaşılmıştır.

2D ısı akışı probleminin bir başka şekli Atwell ve King tarafından ele alınmış, [6], ancak bu çalışmada kontrol değişkeninin (kontrol girişinin) KDD içerisinde mevcut olduğu durum çalışılmış böylelikle UOA sonrasında da kontrol girişi sonlu boyutlu model ifadesinde açıkça görünmüştür.

Sonsuz boyutlu bir KDD prosesi için sonlu boyutlu model elde edilebiliyor ise sınırdan optimal kontrol probleminin çözümü sonlu boyutlu modeli kullanarak yapılabilir. Optimal kontrol tekniği, sınırdan kontrol problemlerinde oldukça iyi sonuçlar üreten bir yaklaşımdır, [17]. Zaman-optimal sınırdan kontrol tekniğinin 1D ısı akışına uygulanması [13] kaynağında ele alınmış ve optimal kontrolün bang-bang niteliği taşıdığı vurgulanmıştır. Röscher, [14], sınır koşullarının karakterizasyonunu bir tanılama problemi gibi ele alarak optimalite koşulları için iteratif bir arama yöntemi sunmakta, Boskovic, [9], ise kararsız ısı akışı denklemi için sınırdan kontrol tasarımı üzerinde durmaktadır. Ravindran [10] ve Singh [8] kaynaklarında optimal kontrol tekniği silindir etrafından geçen aerodinamik akışlar için kullanılmakta, proses ise Navier-Stokes denklemleri ile ifade edilmektedir.

Yukarıdaki kaynaklardan ve ilgili çalışmalardan görülebileceği üzere iyi bir model elde edebilmenin temel motivasyonu iyi bir geribeslemeli kontrol performansı elde edebilmektir. Durum uzayı yaklaşımları ile birçok yöntemin mevcut olması, bu alanda çalışan araştırmacılar için de çok sayıda araştırma geliştirme ve doğrulama problemi sunmaktadır. Bu çalışmada sunulan çözüm, sonlu boyutlu sistemin durumlarını gerektirdiği için bir gözleyici tasarımı şarttır. Sistem durumlarını temin eden bir gözleyici ile Lineer Kuadratik (LK) optimal kontrol problemi çözülebilir hale gelmektedir.

Bu çalışma şu şekilde düzenlenmiştir. Sırasıyla 2D ısı akışı problemi için UOA algoritması özetlenmiş, indirgeme yöntemi tanıtılmış ve model elde edilerek modelleme sonuçları tartışılmıştır. Ardından gelen kısımda gözleyicinin tasarımı ve analizi, ve geribeslemeli kontrolörün tasarımı ele alınmıştır. Çalışmanın literatüre katkısı ve sonuçlar ise çalışmanın sonunda sunulmuştur.

UYUMLU ORTOGONAL AYRIŞIM (UOA)

N_s elemanlı ve i . elemanı $U_i(x,y)$ ile gösterilen enstantaneler kümesi 2D ısı akışı prosesinden elde edilmiş enstantaneler (anlık çözüm görüntüleri) olsun. KDD proses ve ilgili başlangıç ve sınır koşulları aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\begin{aligned}
 u_t(x, y, t) &= c^2(u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)) \\
 u(x, 0, t) &= f_1(x)\gamma_1(t) \\
 u(1, y, t) &= f_2(y)\gamma_2(t) \\
 u(x, 1, t) &= f_3(x)\gamma_3(t) \\
 u(0, y, t) &= f_4(y)\gamma_4(t) \\
 u(x, y, 0) &= 0 \quad \forall (x, y) \in \Omega
 \end{aligned} \tag{1}$$

Yukarıda c değişkeni, değeri bilinen ısı yayılma parametresini, x , y ve t indisleri sırasıyla x , y ve zamana göre kısmi türevleri simgeler. Sürekli zamanda ifade edilen proses $\Omega := \{(x,y) \mid (x,y) \in [0,1] \times [0,1]\}$ fiziksel uzayı üzerinde tanımlanır ve nümerik çözüm koordinatları Ω_d ile gösterilen bir uzaysal grid tarafından tanımlanan pikseller üzerinde oluşturulur. (1) denkleminde bakılırsa, $f_i(\cdot)$ ile gösterilen sınır kazancı, $\gamma(t)$ ile verilen zamansal değişkenin ilgili sınır boyunca prosese nasıl etkiyeceğini belirler. Burada $f_i(\cdot)$ ile gösterilen sınır kazançları keyfi olarak seçilebilmekte ancak problemin köşelerde tutarlı olması açısından $f_i(0) = f_i(1) = 0$ seçilmekte ve böylelikle $\gamma(t)$ uyarıları keyfi biçimde seçilebilmektedir. Bu problem tanımına göre UOA algoritmasının uygulanması ile KDD prosesin çözümü (2) denklemindeki gibi yazılabilecektir.

$$u(x, y, t) = \sum_{i=1}^{R_L} \alpha_i(t) \Phi_i(x, y) \quad (2)$$

Burada $\alpha_i(t)$ değişkeni i . zamansal kipi, $\Phi_i(x,y)$ ise i . uzaysal baz fonksiyonunu göstermekte, R_L ise verilen enstantaneler kümesinden elde edilebilecek bağımsız kip sayısının azami değerini simgelemektedir. Diğer bir deyişle, elde edilen R_L adet uzaysal fonksiyon, verilen enstantaneler kümesinin oluşturduğu uzayı gerecektir. İleride görüleceği üzere $\{\Phi_1(x,y), \dots, \Phi_{R_L}(x,y)\}$ kümesi ortonormal bir kümedir ve Galerkin izdüşümü doğrudan otonom ADD kümesini verecektir. UOA prosedürü kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir.

1. Adım: N_s toplam enstantane sayısını gösterebilir. L ile gösterilen $N_s \times N_s$ boyutlu korelasyon matrisinin elemanları $L_{ij} := \langle U_i, U_j \rangle_{\Omega_d}$ ifadesine göre hesaplanır. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega_d}$ ifadesi $\mathfrak{R}^{N_y \times N_x}$ üzerinde tanımlı iççarpım işlemine denk düşer. Burada $\Delta x = 1/(N_x - 1)$ ve $\Delta y = 1/(N_y - 1)$ ilişkileri mevcuttur.

2. Adım: Korelasyon matrisinin v_i ile gösterilen $N_s \times 1$ boyutlu özvektörleri ve λ_i ile gösterilen özdeğerleri hesaplanır. L matrisi simetrik olduğundan özdeğerlerinin tamamı gerçeldir ve özdeğerlerin hiçbiri negatif değildir. Özdeğerler büyükten küçüğe doğru sıralanır ve böylelikle kipler baskınlık derecesine göre sıralanmış olurlar. Unutulmamalıdır ki her bir kip için $v_i^T v_i = \lambda_i^{-1}$ ilişkisi mevcuttur. Sunuşun basitliği açısından özdeğerlerin birbirinden farklı oldukları varsayılabilir.

3. Adım: Baz fonksiyonları aşağıdaki ilişkiye göre oluşturulur

$$\Phi_i(x, y) = \sum_{j=1}^{N_s} v_{ij} U_j \quad (3)$$

Burada v_{ij} değeri, i . özvektörün j . elemanını simgeler ve $i = 1, 2, \dots, R_L$ için $\Phi_i(x,y)$ baz fonksiyonları çözümden elde edilen enstantanelerin (U_j) ağırlıklı karışımından elde edilmiş olur. δ_{ij} Kronecker delta fonksiyonunu temsil etmek üzere baz fonksiyonlarının $\langle \Phi_i(x, y), \Phi_j(x, y) \rangle_{\Omega} = \delta_{ij}$ ilişkisini sağladığı gösterilebilir, [5,7].

4. Adım: (2) denkleminde ifade edilen sonlu boyutlu çözümün her iki tarafının $\Phi_i(x,y)$ ile iççarpımının hesabı ile her bir enstantanenin alındığı andaki zamansal değişkenlerin değerleri aşağıda da gösterildiği gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \alpha_i(t_0) &= \langle \Phi_i(x, y), u(x, y, t_0) \rangle_{\Omega} \\ &= \langle \phi_i, U_{t_0} \rangle_{\Omega_d} \\ &:= \frac{1}{N_s} \sum_{l=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \phi_i(x_l, y_j) U_{t_0}(x_l, y_j) \\ &:= \phi_i(x, y) \otimes U_{t_0}(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

Burada $\phi_i \in \mathfrak{R}^{N_y \times N_x}$ fonksiyonu, Φ_i ile gösterilen sürekli baz fonksiyonunun uzayda örneklenmiş haline denk düşer ve UOA algoritması ϕ_i büyüklüğünü hesap eder. Benzer şekilde, \otimes ile gösterilen işlemci ise arasında bulunduğu iki matrisin elemanlarının eleman elemana çarpımının

toplamını hesap eder ve skalar bir sayı üretir. Böylelikle, zamansal fonksiyonlar için aşağıdaki ilişkiler yazılabilecektir.

$$\begin{aligned}\langle U_1, \phi_k \rangle_{\Omega_d} &\approx \alpha_k(t_1) \\ \langle U_2, \phi_k \rangle_{\Omega_d} &\approx \alpha_k(t_2) \\ &\vdots \\ \langle U_{N_s}, \phi_k \rangle_{\Omega_d} &\approx \alpha_k(t_{N_s})\end{aligned}\quad (5)$$

Yukarıdaki hesaplama modelden elde edilecek zamansal değişkenlerle, bu değişkenlerin gerçek değerlerinin kıyaslanabilmesi açısından önem arzeder. Dikkat edilmelidir ki zamansal değişkenler de $t \in \{t_1, t_2, \dots, t_{N_s}\}$ kümesi üzerinde (6) denkleminde ifade edildiği gibi ortogonallık özellikleri gösterir.

$$\sum_{i=1}^{N_s} \langle U_i(x, y), \Phi_k(x, y) \rangle_{\Omega_d}^2 \approx \sum_{i=1}^{N_s} \alpha_k^2(t_i) = \lambda_k \quad (6)$$

UOA ile ilgili daha detaylı bilgiye [1-5, 7, 18] kaynaklarında ve bu kaynakların atıfta bulunduğu kaynaklarda erişilebilir.

Temel Varsayım: UOA kullanarak model indirgeme konusunda literatürde yer alan çalışmaların birçoğu KDD'in çözümünde elde edilen nümerik bilginin ayrıştırılabilir olduğunu, diğer bir deyişle çözümün tutarlı kiplerden müteşekkil olduğunu varsayar. Böylelikle çözümü oluşturan kipler baskınlık derecesine göre sıralanabilmekte ve özdeğerlerin tipik bir dağılımı logaritmik bir düşüş sergilemektedir. Ampirik olarak doğruluğu gösterilebilen bu varsayıma dayanarak $M < R_L$ olmak üzere çözüm, M adet kip ile aşağıdaki gibi *bir eşitlik şeklinde* yazılabilmekte ve indirgenmiş model, (1) ile verilen KDD prosesin (7) denklemiyle verilen ifadeyi sağladığı varsayımı altında elde edilebilmektedir, [2, 4, 5, 7, 10].

$$u(x, y, t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \Phi_i(x, y) \quad (7)$$

Yukarıdaki eşitliğin çözüm olarak kabul edilmesi $M+1, M+2, \dots, R_L$ indislerine sahip kiplerin ihmal edildiği anlamına gelir ki bu durumda indirgenmiş modelde kesinsizlikler olacağı aşıkardır. (7) denklemindeki varsayımın kipsel enerjiler açısından değerini nicel hale getirmek için aşağıdaki yüzde enerji ifadesi tanımlanır.

$$E = \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i}{\sum_{i=1}^{R_L} \lambda_i} \times 100 \quad \% \quad (8)$$

(8) ifadesinde seçilen bir M için $E \rightarrow \% 100$ sonucunun ortaya çıkması, enstantanelerde saklı enformasyonun indirgenmiş modelce iyi bir biçimde edinildiğini gösterecektir. Tersini durumda ise, E ne kadar küçük ise indirgenmiş modelin üreteceği zamansal değerlerin (5) denklemi ile hesaplanan gerçek değerlerden sapmaları da o kadar büyük olacak ve model kullanışsız bir modele dönüşecektir. Açıkta ki UOA algoritması ile sonsuz boyuttan R_L boyutlu ifadelerle geçilmekte, yukarıdaki Temel Varsayım ile de R_L boyuttan M boyutlu ifadelerle geçilmektedir. Bir sonraki kısımda sınır uyartılarının modelde giriş değişkenleri olarak görünmesi için yapılması gereken analitik düzenlemeler ele alınacaktır.

SONLU BOYUTLU MODELLEME (MODEL İNDİRGEME)

Model indirgeme için ilk olarak otonom ADD kümesi elde edilmelidir. Bu amaçla, (7) ile verilen ifade (1) denklemindeki KDD için bir çözüm ise, çözüm ifadesi KDD'i sağlamalıdır. Yukarıda verilen Temel Varsayım altında (7) denklemi (1) denkleminde yerine yazılırsa (9) denklemi elde edilir.

$$\sum_{i=1}^M \dot{\alpha}_i(t) \Phi_i(x, y) = c^2 \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \Psi_i(x, y) \quad (9)$$

Yukarıda $\Psi_i(x, y) = \frac{\partial^2 \Phi_i(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i(x, y)}{\partial y^2}$ dir. $\langle \Phi_i(x, y), \Phi_k(x, y) \rangle_{\Omega} = \delta_{ik}$ ifadesi ile (9) denkleminin her iki tarafının $\Phi_k(x, y)$ ile iççarpımı alınır (10) ile verilen otonom ADD ifadesi elde edilir.

$$\dot{\alpha}_k(t) = c^2 \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \langle \Psi_i(x, y), \Phi_k(x, y) \rangle_{\Omega}, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (10)$$

Ψ_k büyüklüğünün Ω_d içerisindeki örneklenmiş karşılığı ζ_k olsun. Buna göre (10) denkleminin (11) ifadesindeki gibi düzenlenebilir ve bu ifadeye indirgenmiş Galerkin modeli denir. Görülmektedir ki KDD proseten elde edilen $\mathfrak{R}^{N_y \times N_x}$ boyutundaki ayrıklaştırılmış enstantaneleri kullanarak aşağıdaki model elde edilebilmektedir.

$$\dot{\alpha}_k = c^2 \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \langle \zeta_i, \phi_k \rangle_{\Omega_d}, \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (11)$$

Yukarıdaki ifade \otimes işlemcisi kullanılarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\dot{\alpha}_k = c^2 \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) (\zeta_i \otimes \phi_k), \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (12)$$

Dikkat edilmelidir ki tanım gereği \otimes işlemi, $\Omega_d^1, \Omega_d^2, \dots, \Omega_d^n$ ile gösterilen, $\Omega_d = \Omega_d^1 \cup \Omega_d^2 \cup \dots \cup \Omega_d^n$ ilişkisini sağlayan ve örtüşmeyen n adet alt domain üzerinde ayrı ayrı uygulanabilir ve her bir alt işlemde elde edilen skalar sayısının toplamı ile Ω_d üzerinden elde edilecek nümerik sonuca ulaşılabilir. Bu özellik, $\zeta_i \otimes \phi_k$ ifadesinin hesabında sınır tabakasını ayırabilmeyi ve sınır koşullarını kullanabilmeyi mümkün kılar. Buna göre,

$$\dot{\alpha}_k = c^2 \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \left(\phi_k(x, 0) \otimes \zeta_i(x, 0) + \phi_k(1, y) \otimes \zeta_i(1, y) + \phi_k(x, 1) \otimes \zeta_i(x, 1) + \phi_k(0, y) \otimes \zeta_i(0, y) + \phi_k^\circ(x, y) \otimes \zeta_i^\circ(x, y) \right) \quad (13)$$

Yukarıda $\phi_k^\circ(x, y)$ ile gösterilen matris, $\phi_k(x, y)$ matrisinin sınır elemanlarına karşı düşen elemanları çıkarıldığında elde edilen $(N_y - 1) \times (N_x - 1)$ boyutlu bir matristir. Benzer şekilde $\phi_k(x, 0)$ matrisi bir satır vektör olup $\phi_k(x, y)$ matrisinin ilk satırına, $\phi_k(0, y)$ ise bir sütun vektör olup $\phi_k(x, y)$ matrisinin ilk sütununa tekabül eder. Bu tanımlarla (13) denklemindeki ifadeler ayrı ayrı hesaplanabilir ve (12) denklemindeki değerler elde edilir. (13) denkleminde $i = k$ olduğu durumdaki terimleri toplam ifadesinden ayırırsak (14) denkleminde elde edilecektir.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_k = & c^2 \alpha_k(t) (\phi_k(x, 0) \otimes \zeta_k(x, 0) + \phi_k(1, y) \otimes \zeta_k(1, y) + \phi_k(x, 1) \otimes \zeta_k(x, 1) + \phi_k(0, y) \otimes \zeta_k(0, y)) + \\ & c^2 \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) (1 - \delta_{ik}) (\phi_k(x, 0) \otimes \zeta_i(x, 0) + \phi_k(1, y) \otimes \zeta_i(1, y) + \phi_k(x, 1) \otimes \zeta_i(x, 1) + \phi_k(0, y) \otimes \zeta_i(0, y)) + \\ & c^2 \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) (\phi_k^\circ(x, y) \otimes \zeta_i^\circ(x, y)) \end{aligned} \quad (14)$$

Yukarıdaki denklemin düzenlenebilmesi için sınır koşulları aşağıdaki gibi ifade edilmelidir. (15) denklemini yazarken varsayılan gerçek, (7) ifadesi bir çözüm ise bu çözümün (15) denkleminde verilen şekilde sınırlarda da sağlanması gerekliliğidir. Buna göre sınırların $y = 0$ parçası için (16) ifadesi elde edilir.

$$\sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(x,0) = f_1(x) \gamma_1(t) \quad (15)$$

$$\alpha_k(t) \phi_k(x,0) = f_1(x) \gamma_1(t) - \sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i(t) \phi_i(x,0) \quad (16)$$

Benzer şekilde sırasıyla $x = 1$, $y = 1$ ve $x = 0$ ile verilen sınırlar için de

$$\sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(1, y) = f_2(y) \gamma_2(t) \quad (17)$$

$$\alpha_k(t) \phi_k(1, y) = f_2(y) \gamma_2(t) - \sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i(t) \phi_i(1, y) \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(x, 1) = f_3(x) \gamma_3(t) \quad (19)$$

$$\alpha_k(t) \phi_k(x, 1) = f_3(x) \gamma_3(t) - \sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i(t) \phi_i(x, 1) \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(0, y) = f_4(y) \gamma_4(t) \quad (21)$$

$$\alpha_k(t) \phi_k(0, y) = f_4(y) \gamma_4(t) - \sum_{i=1}^M (1 - \delta_{ik}) \alpha_i(t) \phi_i(0, y) \quad (22)$$

ifadeleri yazılabilecektir. (16), (18), (20) ve (22) ifadelerini (14) denkleminin ilk satırında yerlerine yazarsak (23) ile verilen ifadeye ulaşılır.

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_k = & c^2 (f_1(x) \otimes \zeta_k(x,0)) \gamma_1(t) + c^2 (f_2(y) \otimes \zeta_k(1, y)) \gamma_2(t) + \\ & c^2 (f_3(x) \otimes \zeta_k(x,1)) \gamma_3(t) + c^2 (f_4(y) \otimes \zeta_k(0, y)) \gamma_4(t) + \\ & c^2 \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) (\phi_k \otimes \zeta_i - \phi_i(x,0) \otimes \zeta_k(x,0) - \phi_i(1, y) \otimes \zeta_k(1, y) - \phi_i(x,1) \otimes \zeta_k(x,1) - \phi_i(0, y) \otimes \zeta_k(0, y)) \end{aligned} \quad (23)$$

Yukarıdaki ifade (24) denkleminde verildiği gibi bir durum uzayı sistemi şeklinde yazılabilir.

$$\dot{\alpha} = A\alpha + B\Gamma \quad (24)$$

Burada $\alpha(t) = (\alpha_1(t) \ \alpha_2(t) \ \dots \ \alpha_M(t))^T$ ve $\Gamma(t) = (\gamma_1(t) \ \gamma_2(t) \ \gamma_3(t) \ \gamma_4(t))^T$ ile gösterilen büyüklükler sırasıyla durum vektörüne ve sınır koşullarına (giriş vektörüne) karşı düşer. Sistemi betimleyen değişkenler ise (25) ve (26) ifadelerinde verilen biçimde tanımlanırlar.

$$A_{ki} = c^2 (\phi_k \otimes \zeta_i - \phi_i(x,0) \otimes \zeta_k(x,0) - \phi_i(1, y) \otimes \zeta_k(1, y) - \phi_i(x,1) \otimes \zeta_k(x,1) - \phi_i(0, y) \otimes \zeta_k(0, y)) \quad (25)$$

$$B_k = c^2 (f_1(x) \otimes \zeta_k(x,0) \quad f_2(y) \otimes \zeta_k(1, y) \quad f_3(x) \otimes \zeta_k(x,1) \quad f_4(y) \otimes \zeta_k(0, y)) \quad (26)$$

Bu sonuçla (1) denkleminde verilen KDD proses için UOA kullanarak elde edilen kiplerle indirgenmiş Galerkin modeli tasvir edilmektedir. Bu bölümün devamında ilk olarak $\gamma_j = 0$ olduğu durumda (12) ile verilen kapalı formun tekrar elde edilebileceği gösterilecektir. Bunun için (23) denklemini $\gamma_j = 0$ için aşağıdaki gibi tekrar yazalım;

$$\dot{\alpha}_k = c^2 \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) (\phi_k \otimes \zeta_i - \phi_i(x,0) \otimes \zeta_k(x,0) - \phi_i(1, y) \otimes \zeta_k(1, y) - \phi_i(x,1) \otimes \zeta_k(x,1) - \phi_i(0, y) \otimes \zeta_k(0, y)) \quad (27)$$

(12) denklemindeki eşitliğin (27) denkleminde yerine kullanılmasıyla, (28) denkleminde verilen ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) (-\phi_i(x,0) \otimes \zeta_k(x,0) - \phi_i(1,y) \otimes \zeta_k(1,y) - \phi_i(x,1) \otimes \zeta_k(x,1) - \phi_i(0,y) \otimes \zeta_k(0,y)) \\
&= -\sum_{i=1}^M \alpha_i(t) (\phi_i(x,0) \otimes \zeta_k(x,0)) - \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) (\phi_i(1,y) \otimes \zeta_k(1,y)) \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) (\phi_i(x,1) \otimes \zeta_k(x,1)) - \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) (\phi_i(0,y) \otimes \zeta_k(0,y)) \\
&= -\left(\sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(x,0) \right) \otimes \zeta_k(x,0) - \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(1,y) \right) \otimes \zeta_k(1,y) \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(x,1) \right) \otimes \zeta_k(x,1) - \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \phi_i(0,y) \right) \otimes \zeta_k(0,y)
\end{aligned} \tag{28}$$

(15), (17), (19) ve (21) denklemleri ile verilen ifadelerin (28) denkleminde kullanılmasıyla (29) denklemindeki ifade elde edilir ki $\gamma = 0$ olduğu için denklemin sağ tarafı da sıfıra eşittir.

$$0 = (f_1(x) \otimes \zeta_k(x,0))\gamma_1(t) + (f_2(y) \otimes \zeta_k(1,y))\gamma_2(t) + (f_3(x) \otimes \zeta_k(x,1))\gamma_3(t) + (f_4(y) \otimes \zeta_k(0,y))\gamma_4(t) \tag{29}$$

Yukarıdaki sonuç, sınırlardan zorlanmayan sistem için otonom denklem kümesinin, analitik manipülasyonla otonom olmayan şekle dönüştürülen denklem kümesiyle özdeş sonuçlar ürettiğini gösterir. Son olarak, $\dot{\alpha}_k = 0$ olduğu durumda, yani sürekli hale erişildiğinde otonom ADD kümesi ile otonom olmayan ADD kümesinin aynı sonuçları üreteceği gösterilmelidir. Bu amaçla, (23) denklemini $\dot{\alpha}_k = 0$ için tekrar yazalım ve (12) denklemini bu ifade içerisinde kullanalım, bu (30a) denklemindeki ifadeyi verecek, düzenlendiğinde ise (30b) denklemindeki sonuca ulaşılacaktır.

$$\begin{aligned}
0 &= c^2(f_1(x) \otimes \zeta_k(x,0))\gamma_1(t) + c^2(f_2(y) \otimes \zeta_k(1,y))\gamma_2(t) + \\
&\quad c^2(f_3(x) \otimes \zeta_k(x,1))\gamma_3(t) + c^2(f_4(y) \otimes \zeta_k(0,y))\gamma_4(t) + \\
&\quad c^2 \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) (-\phi_i(x,0) \otimes \zeta_k(x,0) - \phi_i(1,y) \otimes \zeta_k(1,y) - \phi_i(x,1) \otimes \zeta_k(x,1) - \phi_i(0,y) \otimes \zeta_k(0,y))
\end{aligned} \tag{30a}$$

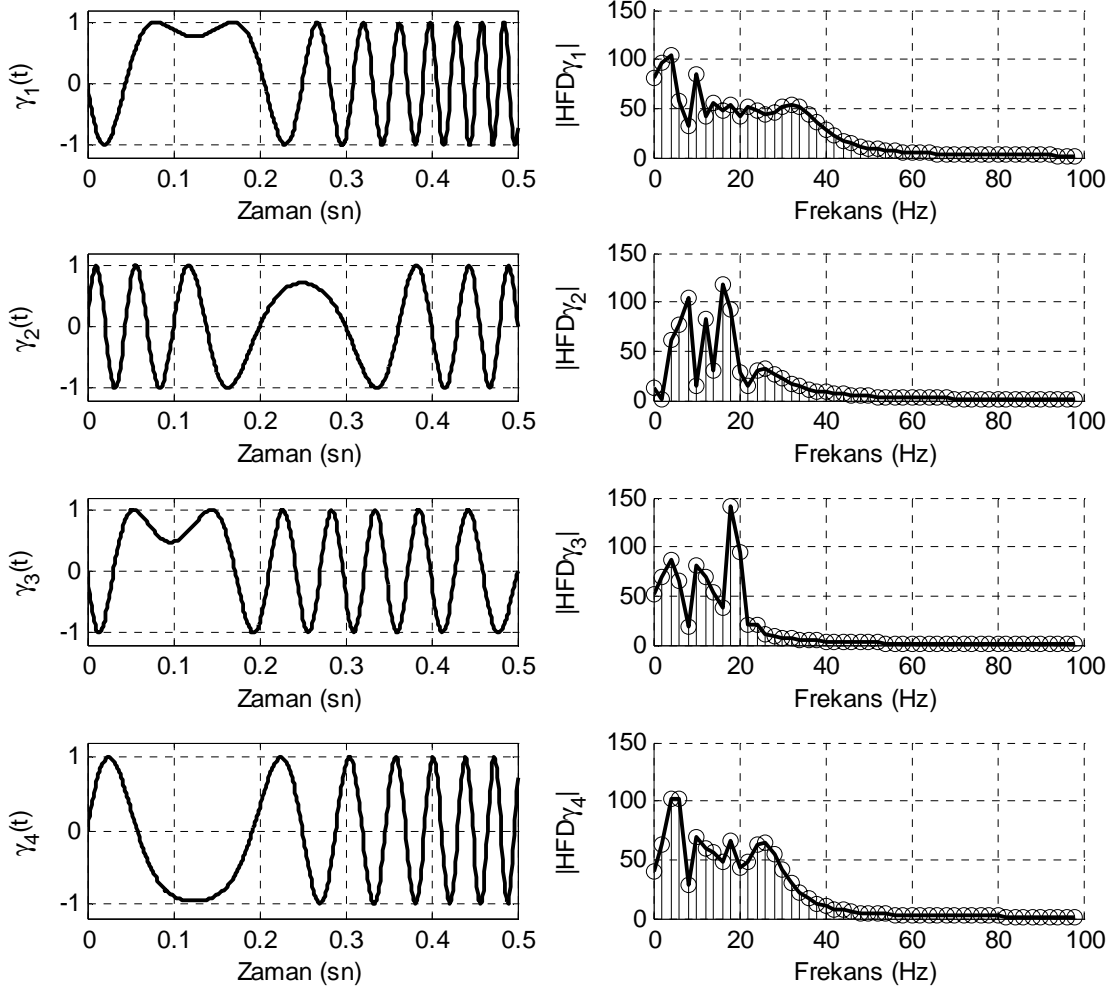
$$\begin{aligned}
0 &= c^2 \left(f_1(x)\gamma_1(t) - \sum_{i=1}^M \alpha_i(t)\phi_i(x,0) \right) \otimes \zeta_k(x,0) + c^2 \left(f_2(y)\gamma_2(t) - \sum_{i=1}^M \alpha_i(t)\phi_i(1,y) \right) \otimes \zeta_k(1,y) + \\
&\quad c^2 \left(f_3(x)\gamma_3(t) - \sum_{i=1}^M \alpha_i(t)\phi_i(x,1) \right) \otimes \zeta_k(x,1) + c^2 \left(f_4(y)\gamma_4(t) - \sum_{i=1}^M \alpha_i(t)\phi_i(0,y) \right) \otimes \zeta_k(0,y)
\end{aligned} \tag{30b}$$

(30b) denkleminde parantez içerisindeki her terim (15), (17), (19) ve (21) denklemleri ile verilen sınır koşullarından dolayı sıfırdır. Böylelikle (30b) ifadesinin sağ tarafı da sıfır olacaktır. Bu sonuç, (12) denklemindeki otonom ADD sisteminin sürekli halde üreteceği cevap ile (23) denklemindeki otonom olmayan ADD sisteminin sürekli halde üreteceği cevabın özdeş olacağını göstermektedir.

Bu modelleme çalışması uzayda ayrıklaştırma yapılmadan yürütülseydi sınır terimleri, sınır tabakasının sıfır ölçü küme olmasından dolayı iççarpım işleminde ayrılamazdı. Ayrıklaştırma işlemi sınır tabakasına sıfır olmayan bir ölçü kazandırmakta ve bundan dolayı iççarpım işleminde sınır terimleri ve uyarılar ayrılabilen, sıfır olmayan bir B matrisi de bu sayede tanımlanabilmektedir. İşlemsel grid çözünürlüğü artırılırsa B matrisinin elemanları da sıfıra yaklaşacak bu sebeple sınır tabakasının etkilerini gözlemek zor olacaktır. Bu sebeptendir ki KDD proseslerin nümerik çözümlerine dayalı yöntemlerin uygulanmasında işlemsel grid seçimi son derece kritik bir önem arzeder. Bir sonraki bölümde (24) denklemi ile verilen modelin performansı tartışılacaktır.

MODELLEME SONUÇLARI

Bir önceki bölümde türetilen yöntemle (24) denkleminde verilen modelin elde edilebilmesi için KDD prosesin sayısal çözümünün yapılması gereklidir. Nümerik avantajlarından dolayı KDD çözümü Crank-Nicholson metodu ile 1 ms zaman adımı kullanılarak elde edilmiştir, [15].



Şekil 1: Model türetiminde kullanılan sınır uyarıları ve Hızlı Fourier Dönüşümü (HFD) resimleri

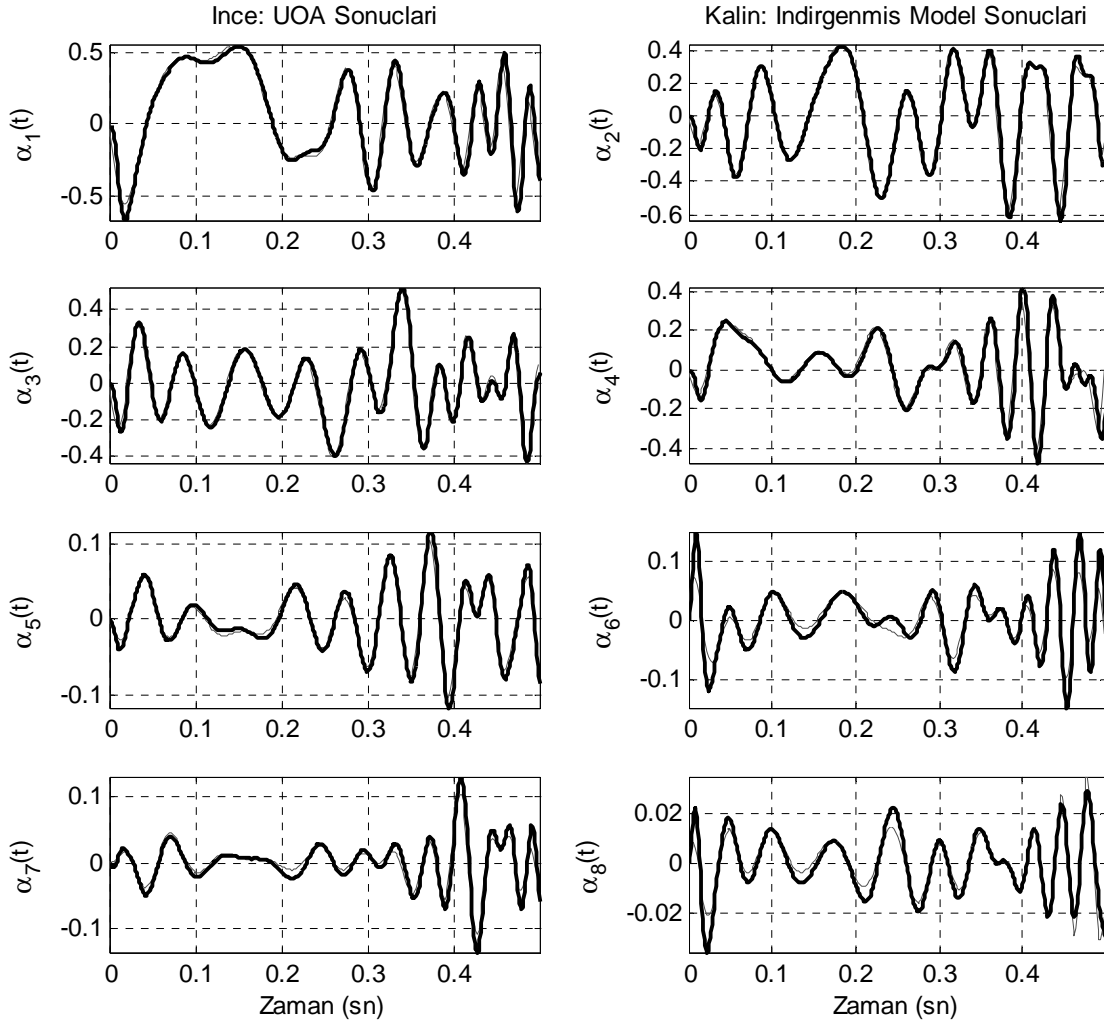
Başlangıçta tüm noktadaki ısı değeri sıfır alınmış, ısı yayılma katsayısı is $c = 2$ olarak benimsenmiştir. Çözümü oluşturabilmek için seçilen grid x ve y eksenleri boyunca lineer olarak dağılan $N_x = N_y = 25$ adet nokta içermektedir. KDD $T = 0.5$ saniyelik bir zaman diliminde uyarılmış ve toplam 501 çözüm enstantanesi oluşturulmuştur. Bu enstantaneler arasında doğrusal örnekleme ile (biri atlayarak) elde edilen 251 enstantane seçilmiş ve bu enstantaneler UOA algoritmasında kullanılarak indirgenmiş Galerkin modeli elde edilmiştir. Modelde ilk 8 kip kullanılmış ($M = 8$) ve böylelikle (8) denkleminde verilen yüzde enerji ifadesi için $E = \%99.9840$ değeri elde edilmiştir. Proses sınır kazançları $f_1(x) = f_3(x) = \sin(2\pi x)$ ve $f_2(y) = f_4(y) = \sin(2\pi y)$ seçilmiş ve modelin türetiminde (31)-(34) denklemlerinde verilen sınır uyarıları kullanılmıştır. Şekil 1'de de gösterilen bu uyarılar, spektral görüntülerinin zengin içerikli olmasından ötürü prosesin birçok kipini uyarabilmekte ve elde edilen modelin bu frekanslardaki etkileri de içermesini sağlamaktadır.

$$\gamma_1(t) = -\sin(2\pi 55t(T/2 - t)) \quad (31)$$

$$\gamma_2(t) = \sin(2\pi 50t(T - t)) \quad (32)$$

$$\gamma_3(t) = -\sin(2\pi 120t(T/3 - t + t^2)) \quad (33)$$

$$\gamma_4(t) = \sin(2\pi 45t(T/2 - t)) \quad (34)$$



Şekil 2: Model türetiminde kullanılan sınır uyarıları için UOA ile ve indirgenmiş model ile elde edilen $\alpha(t)$ değerleri

Şekil 2’de yukarıdaki uyarılar için UOA algoritmasından elde edilen $\alpha(t)$ değerleri (ince eğriler) ve indirgenmiş modelden elde edilen $\alpha(t)$ değerleri (kalın eğriler) her bir kip için birlikte çizdirilmiştir. Şekilden de görüldüğü üzere ilk kipte model performansı çok iyi ve kip genliği büyük iken, kip indisi arttıkça benzerlik azalmakta genlikler de küçülmektedir. İndirgenmiş modelin, kendisinin türetiminde kullanılan sınır uyarıları için iyi sonuçlar vermesi şaşırtıcı bir sonuç değildir. Modelin benzer fakat farklı sınır uyarıları için üreteceği cevap bu konudaki şüpheleri giderecektir. Bu sebeple (35)-(38) denklemlerinde verilen ve Şekil 3’te gösterilen sınır uyarıları için Şekil 4’te verilen sonuçlar elde edilmiş ve görülmüştür ki indirgenmiş model, (1) denkleminde verilen KDD ve sınır koşulları için, ve seçilen sınır kazançları için sonsuz boyutlu istemin üreteceği cevaba çok yakın bir cevap üretmektedir.

$$\gamma_1(t) = \sin(2\pi 75t(T/2 - t)) \quad (35)$$

$$\gamma_2(t) = -\sin(2\pi 60t(T/4 - t^2)) \quad (36)$$

$$\gamma_3(t) = -\sin(2\pi 120t(T/2 - t + t^2)) \quad (37)$$

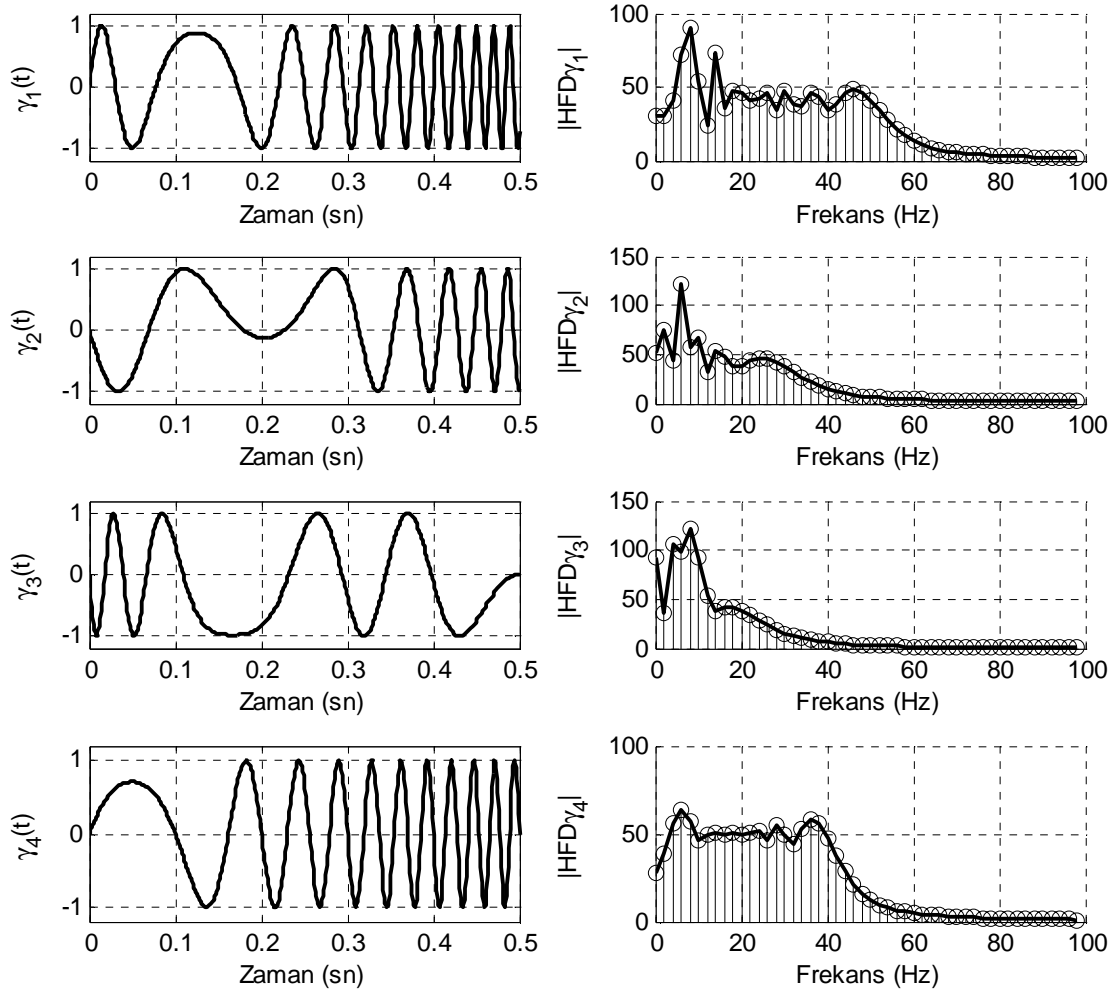
$$\gamma_4(t) = \sin(2\pi 50t(T/5 - t)) \quad (38)$$

Bu kısımda belirtilmesi gereken son husus, seçilen kip sayısı ve yüzde enerji değerinin değişimi üzerinedir. Şekil 5’te gösterilen enerji ifadesinin (E) kip sayısına göre değişimi, UOA algoritmasının özdeğerlerin birbirlerinden farklı olması ve logaritmik olarak küçülmesi varsayımını doğrulamaktadır. Tablo I’de, (24) denklemi ile verilen A matrisinin özdeğerleri listelenmiş, Şekil 6’da ise bu özdeğerlerden en büyük reel kısma sahip olanın reel kısmı kip indisine göre çizdirilmiştir. Kip sayısı tek tek arttırılmış ve

görülmüştür ki seçilen çalışma koşulları altında kararlı bir A matrisi ilk olarak $M = 8$ için elde edilebilmiş ve bu M değeri için $E = \%99.9840$ değeri elde edilmiştir (Bkz. Şekil 6). Bu veriler üç önemli bulguyu da ortaya koymuştur.

1. KDD sistemi kararlı olsa bile modellemede kullanılan kip sayısının her değeri için elde edilen indirgenmiş model, kararlı olmayabilir (Bkz. Şekil 6). $M < 8$ için elde edilen indirgenmiş modeller KDD davranışına yaklaşıklık göstermemektedir.
2. Yüzde enerji kavramı, sadece $E \approx \%100$ civarında anlamlı sonuçlar üretmektedir. $M = 7$ için $E = \%99.9302$ olması ve modelin kararsız bir model olması bu sonucu destekler niteliktedir.
3. 2D ısı akışı gibi öz ek bir KDD için nümerik verilere dayalı modelleme Tablo I'de de gösterildiği üzere büyük sanal kısımlara sahip özdeğerlerin ortaya çıkmasına sebep olmuştur.

Şekil 6'da görülen yakınsak davranış ise nümerik çözücünün parametrelerinin kabul edilebilir ölçüde iyi olduğuna işaret etmektedir.



Şekil 3: Model doğrulamada kullanılan sınır uyartıları ve HFD resimleri

GÖZLEYİCİ TASARIMI

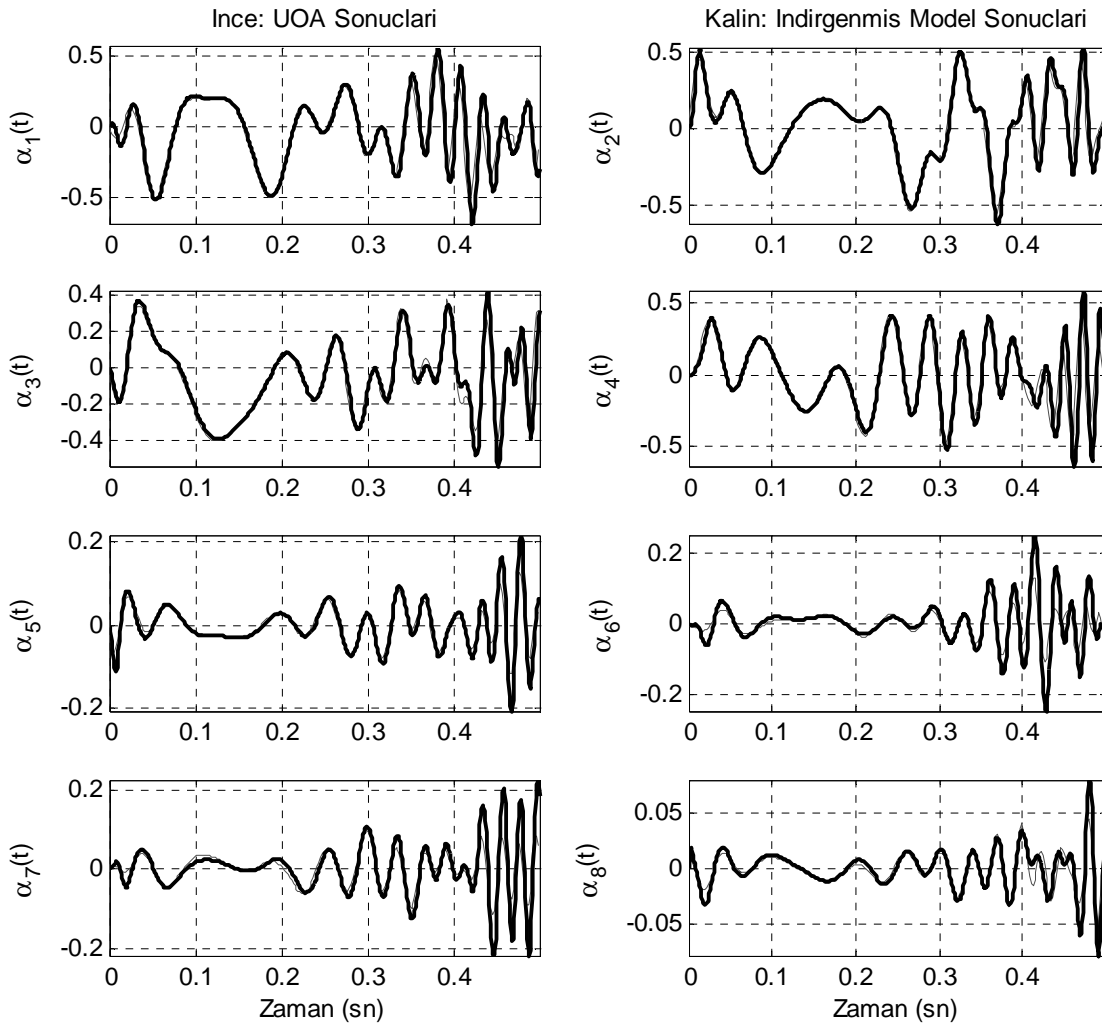
(1) denklemi ile verilen 2D ısı akışı sistemi için aşağıdaki KDD'li gözleyiciyi ele alalım. Burada $K > 0$ gözleyici kazancıdır.

$$\begin{aligned}
 v_t(x, y, t) &= c^2(v_{xx}(x, y, t) + v_{yy}(x, y, t)) + K(u - v) \\
 v(x, 0, t) &= f_1(x)\gamma_1(t) \\
 v(1, y, t) &= f_2(y)\gamma_2(t) \\
 v(x, 1, t) &= f_3(x)\gamma_3(t) \\
 v(0, y, t) &= f_4(y)\gamma_4(t)
 \end{aligned} \tag{39}$$

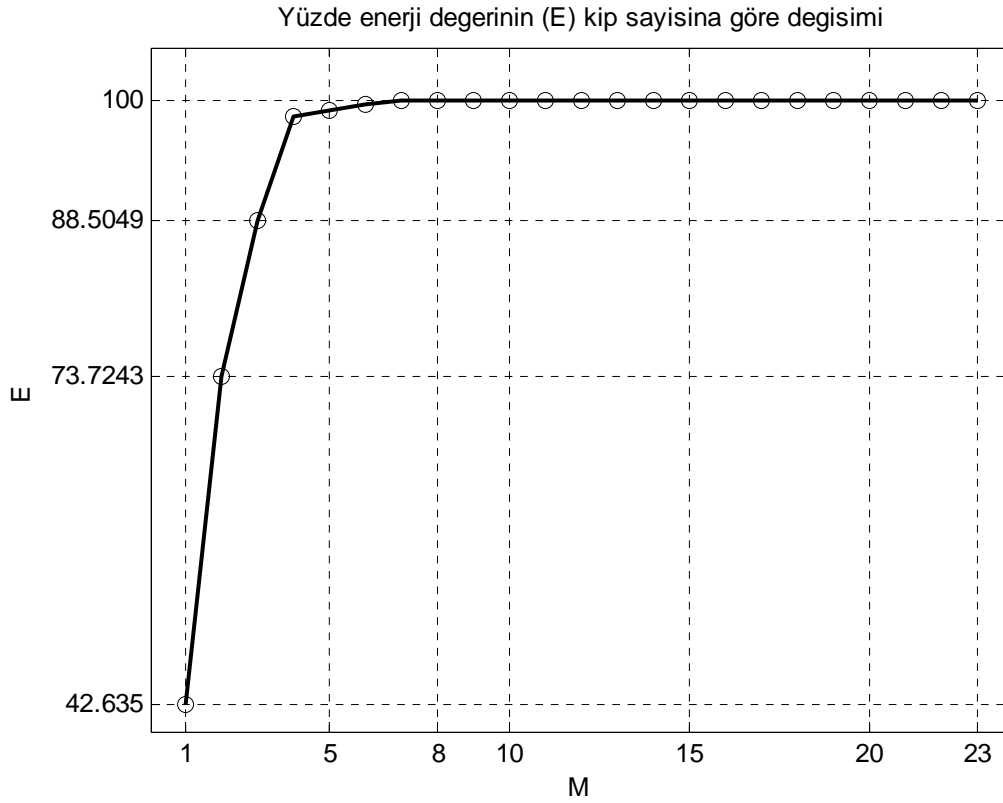
Yukarıdaki sonsuz boyutlu gözleyiciyi tanımlayan ifadeye bakılırsa $u(x, y, t)$ bilgisine ihtiyaç duyulduğu görülecektir. Bu çalışmada gözleyicinin işlevi, ölçümleri bozan gürültünün olumsuz etkilerini bertaraf etmektir. Kararlılığı ispat etmek için (40) ile verilen Lyapunov fonksiyonunu ele alalım.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (u - v)^2 dx dy \tag{40}$$

Bu Lyapunov fonksiyonunun zamana göre türevi, $z = u - v$ olmak üzere (41) denkleminde verilmiştir.



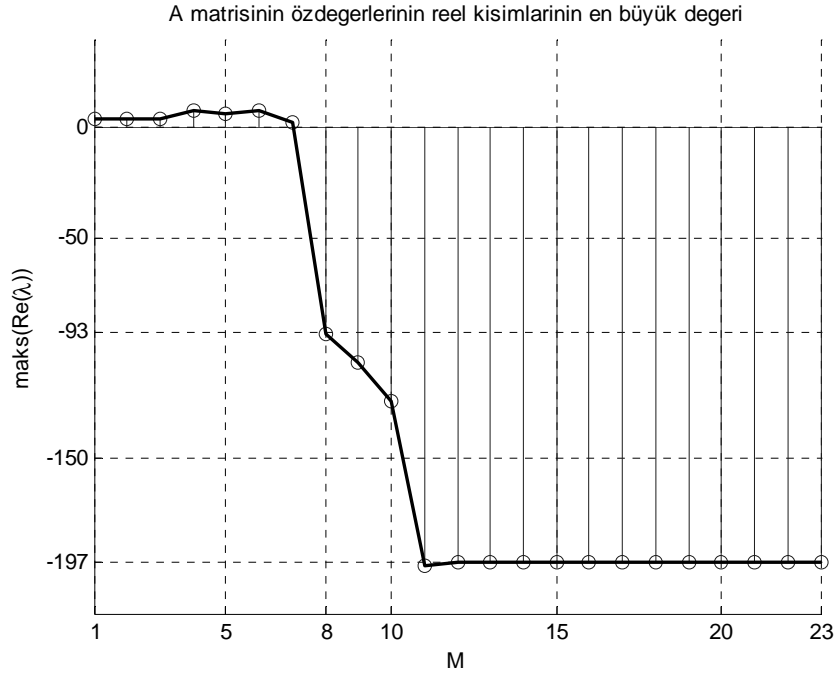
Şekil 4: Model doğrulamada kullanılan sınır uyarıları için UOA ile ve indirgenmiş model ile elde edilen $\alpha(t)$ değerleri



Şekil 5: Yüzde enerji (E) değerinin indirgenmiş modele katılan kip sayısına (M) göre değişimi

Tablo I: Kip sayısının değişimi ile A matrisinin sahip olduğu özdeğerler

| $M = 1$ | $M = 2$ | $M = 3$ | $M = 4$ |
|--|--|--|--|
| 3.8774 | $4.2403 + j4.5062$ $4.2403 - j4.5062$ | 4.2012 $3.4601 + j27.3230$ $3.4601 - j27.3230$ | 7.4479 3.9912 $3.8733 + j30.0402$ $3.8733 - j30.0402$ |
| $M = 5$ | $M = 6$ | $M = 7$ | $M = 8$ (Kararlı) |
| 6.53 $-121.49 + j377.93$ $-121.49 - j377.93$ $3.09 + j13.36$ $3.09 - j13.36$ | 0.0754 0.0257 $-0.9960 + j3.4406$ $-0.9960 - j3.4406$ $-1.2244 + j3.9020$ $-1.2244 - j3.9020$ | 2.36 $-121.95 + j420.92$ $-121.95 - j420.92$ $-99.74 + j336.91$ $-99.74 - j336.91$ $-105.06 + j360.45$ $-105.06 - j360.45$ | $-389.59 + j1052.12$ $-389.59 - j1052.12$ $-93.26 + j292.34$ $-93.26 - j292.34$ $-120.40 + j402.18$ $-120.40 - j402.18$ $-106.01 + j355.87$ $-106.01 - j355.87$ |



Şekil 6: Yüzde enerji (E) değerinin modele katılan kip sayısına (M) göre değişimi

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \int_0^1 \int_0^1 (u-v)(u_t - v_t) dx dy \\ &= -2KV + c^2 \int_0^1 \int_0^1 z(z_{xx} + z_{yy}) dx dy\end{aligned}\quad (41)$$

Sınır koşullarından dolayı (42) ve (43) ifadeleri elde edilecektir.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 z z_{xx} dx dy &= \int_0^1 \left(z z_x \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 z_x^2 dx \right) dy \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 z_x^2 dx dy\end{aligned}\quad (42)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 z z_{yy} dx dy = - \int_0^1 \int_0^1 z_y^2 dx dy\quad (43)$$

Bu sonuçlarla (41) denklemindeki türev ifadesi (44) denklemindeki sonucu verecektir.

$$\dot{V} = -2KV - c^2 \int_0^1 \int_0^1 (z_x^2 + z_y^2) dx dy < 0\quad (44)$$

Bu gözleyici ile $\dot{V} < 0$ garanti edildiği için $t \rightarrow \infty$ için $v(x, y, t) \rightarrow u(x, y, t)$ sonucu üstel kararlılık gösterecektir. Burada cevap verilmesi gereken soru, bu gözleyicinin geribeslemeli kontrol için yarar sağlayıp sağlamayacağıdır. Bu amaçla Temel Varsayımı tekrar hatırlayarak gözleyici tarafından üretilen sonucu aynı baz fonksiyonları kümesi üzerine $v(x, y, t) = \sum_{i=1}^M \beta_i(t) \Phi_i(x, y)$ şeklinde açabiliriz. Bu ifadenin (39) ile verilen KDD'de yerine yazılmasıyla (45) denklemini elde edilir.

$$\sum_{i=1}^M \dot{\beta}_i(t) \Phi_i(x, y) = c^2 \sum_{i=1}^M \beta_i(t) \Psi_i(x, y) + Ku(x, y, t) - K \sum_{i=1}^M \beta_i(t) \Phi_i(x, y)\quad (45)$$

Burada $\beta_i(t)$ ile gösterilen büyüklük $\Phi_i(x,y)$ ile gösterilen uzaysal baz fonksiyonunun etkinliğini belirleyen zamansal değişkene karşı düşmektedir. (45) ifadesinin her iki tarafının $\Phi_k(x,y)$ ile iççarpımının alınmasıyla (46) ifadesi elde edilecektir.

$$\dot{\beta}_k(t) = c^2 \sum_{i=1}^M \beta_i(t) \langle \Phi_k(x,y), \Psi_i(x,y) \rangle_{\Omega} + K\sigma(t) \quad (46)$$

Yukarıda $\sigma(t) = (\sigma_1(t) \ \sigma_2(t) \ \dots \ \sigma_M(t))^T$ ile verilmekte ve $\sigma_k(t)$ büyüklüğü aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\begin{aligned} \sigma_k(t) &= \langle u(x,y,t), \Phi_k(x,y) \rangle_{\Omega} - \sum_{i=1}^M \beta_i(t) \langle \Phi_k(x,y), \Phi_i(x,y) \rangle_{\Omega} \\ &= \langle U_t, \phi_k \rangle_{\Omega_d} - \beta_k(t) \end{aligned} \quad (47)$$

(47) denkleminde $U_t \in \Omega_d$ KDD prostenen t anında elde edilen enstantaneye karşı düşer. Modelleme bölümünde anlatılan prosedürün gözleyici için tekrarı sonucunda (48) denklemi ile verilen indirgenmiş gözleyici ifadesine ulaşılacaktır.

$$\dot{\beta}(t) = A\beta(t) + B\Gamma(t) + K\sigma(t) \quad (48)$$

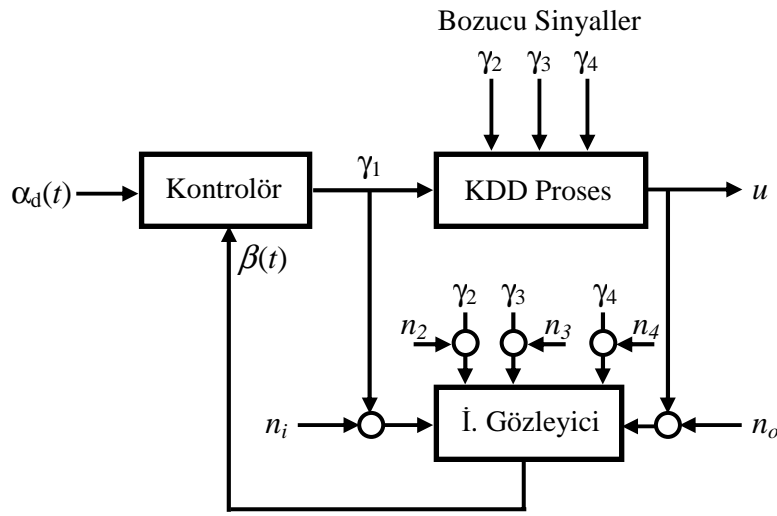
Yukarıdaki ifadede görülen A ve B matrisleri sırasıyla (25) ve (26) denklemlerinde tanımlanmıştır. (47) ifadesinde verilen $\langle U_t, \phi_k \rangle_{\Omega_d}$ terimi KDD prostenen sonsuz boyutlu geribeslemeyi gerektirir. Bu terim doğal olarak $\alpha_k(t)$ ile gösterilen durum değişkeninin karşılığıdır. Bu nedenle $\alpha_k(t)$ ile gösterilen büyüklük daha önce bahsedilen temel varsayım altında gözleyici ve proses durum vektörleri arasındaki fark (hata) ifadesine denk düşer. (40) denklemi ile verilen Lyapunov fonksiyonunun aşağıdaki gibi düzenlenmesi, sonsuz boyutlu proses ile sonlu boyutlu model arasındaki geçişin anlaşılması için Temel Varsayımın ne denli önemli bir rol oynadığını göstermektedir.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (u(x,y,t) - v(x,y,t))^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \Phi_i(x,y) - \sum_{i=1}^M \beta_i(t) \Phi_i(x,y) \right)^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^M (\alpha_i(t) - \beta_i(t)) \Phi_i(x,y) \right)^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^M e_i(t) \Phi_i(x,y) \right)^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^M e_i^2(t) \Phi_i^2(x,y) \right) dx dy + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^M e_i(t) e_j(t) \Phi_i(x,y) \Phi_j(x,y) \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^M e_i^2(t) \int_0^1 \int_0^1 \Phi_i^2(x,y) dx dy \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^M \left(e_i(t) e_j(t) \int_0^1 \int_0^1 \Phi_i(x,y) \Phi_j(x,y) dx dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^M e_i^2(t) \delta_{ii} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^M (e_i(t) e_j(t) \delta_{ij}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M e_i^2(t) \\ &= \frac{1}{2} e^T e \end{aligned} \quad (49)$$

Böylelikle Temel Varsayımın sağlandığı hallerde indirgenmiş Galerkin modeli ve ilgili gözleyici sonsuz boyuttaki karşılıklarına denk düşeceklerdir.

2D ISI AKIŞININ SINIRDAN OPTİMAL KONTROLÜ

Kontrol mühendisliği uygulamaları içerisinde Linear Kuadratik (LK) optimal kontrol teniği önemli bir yere sahiptir. Maliyet fonksiyonunun kuadratik olduğu ve sistem durumlarının mevcut olduğu hallerde durumların özel bir kombinasyonu maliyet fonksiyonunun minimize eder. Benzer koşullar altında KDD'li sistemlerin sonsuz boyutlu kontrolü [17] kaynağında tartışılmaktadır. Bu çalışmada sistemin durum vektörü bir önceki kısımda tartışılan gözleyici ile elde edilmekte ve gözleyici performansını değerlendirmek amacıyla şu çalışma koşulları üzerinde durulmaktadır: γ_2 , γ_3 ve γ_4 ile gösterilen girişler bozucu sinyal girişleridir. Bu girişlerdeki sinyaller deterministik olup kontrolörün bozucu girişlerin etkisini reddetme yeteneğini görebilmek amacıyla kullanılmışlardır. γ_1 girişi ise kontrol sinyalinin prosese giriş noktasıdır ve kapalı çevrimdeki performans beklentileri bu giriş üzerinden uygulanacak kontrol sinyali ile karşılanacaktır.



Şekil 7: Geribeslemeli kontrol sisteminin blok diyagramı

(24) denkleminde verilen durum uzayı sisteminin B matrisi $B = [B_c \ B_d]$ şeklinde düzenlensin. Burada B_c matrisi $M \times 1$ boyutunda ve γ_1 girişinin etkisini sisteme katan sütun vektörünü, B_d ise $M \times 3$ boyutunda ve bozucu sinyallerin etkilerini sisteme katan matrisi temsil eder. Bu aşamada indirgenmiş sistemin yapısal özellikleri üzerinde durmakta yarar vardır. İlk olarak A matrisinin özdeğerleri (ξ_i , $i = 1, 2, \dots, M$) hesaplanmış ve bu özdeğerlerin her biri için $[\xi I - A \mid B_c]$ matrisinin rankına bakılmıştır. Her bir özdeğer için $\text{rank}[\xi I - A \mid B_c] = M$ bulunmuştur. Kontrol edilebilirlik için $\int_0^\infty e^{At} B B^* e^{A^*t} dt$ ile verilen kontrol edilebilirlik gramiyenin rankı da M bulunmuştur. Aynı analiz $[B_c \ AB_c \ A^2 B_c \ \dots \ A^{M-1} B_c]$ ile verilen kontrol edilebilirlik matrisinin rankına bakıldığında ise mevcut indirgenmiş model için 4 değerini vermektedir. Sonuçlardaki bu farklılık UOA algoritması ile işleme katılan ayırıklaştırma ve nümerik hassasiyet problemlerinden kaynaklanmaktadır. UOA algoritmasının temel felsefesi, kipleri baskın olanlardan başlayarak sıraya sokmaktır. Dolayısıyla indisi büyük olan kipler sonuca az etkileyen kipler olacaktır. Sabit Δx ve Δy değerleri altında M değeri artırılırsa, büyük indisli kiplerdeki kesinsizlik büyük olacak ve bu kipler kontrol edilebilirlik analizinde çelişkili sayılabilecek sonuçlar üreteceklerdir. Her halukarda kiplerin tamamı kararlı olduğu için kontrol edilemeyen olası kiplerin varlığı kuadratik kontrol amacı açısından sorun teşkil etmeyecektir.

Şekil 7'de gösterilen kumanda sinyali $\alpha_d(t)$ zamansal kiplerin istenen değerleridir. Diğer bir deyişle, geribeslemeli kontrolün amacı, $\alpha_d(t)$ referans işaretinin takip edilmesidir. Temel Varsayım altında bu referans sinyali $\Omega \times t := \{(x, y, t) \mid (x, y, t) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, T]\}$ uzayında $u_d(x, y, t) = \sum_{i=1}^M \alpha_{di}(t) \Phi_i(x, y)$ şeklinde yazılarak $u(x, y, t)$ için istenen profili tasvir edecektir. Şekil 7'deki blok diyagrama göre sırasıyla $n_i(t)$, $n_2(t)$, $n_3(t)$ ve $n_4(t)$ ile gösterilen gürültü sinyalleri, gözleyici tarafından okunan giriş sinyalini ve deterministik

bozucu girişlere eklenir. $n_o(x,y,t)$ ile gösterilen gürültü terimi ise uzayda sürekli olup KDD proseten okunan anlık bilgiyi bozan ölçüm gürültüsüdür. Bu koşullar altında gözleyiciden elde edilen durum vektörü kullanılarak aşağıda verilen maliyet fonksiyonunu minimize eden bir kontrol sinyali aranmaktadır.

$$J = \int_0^{\infty} e(t)^T W e(t) + r \gamma_1^2 dt \quad (50)$$

Yukarıda $e(t) = \alpha(t) - \alpha_d(t)$ ile verilmekte ve durum izleme hatasına karşı düşmektedir. $W \in \mathfrak{R}^{M \times M}$ bir pozitif bir ağırlık matrisi, $r > 0$ ise kontrol sinyali ile durum izleme hatası arasındaki görelî önemi dengeleme parametresidir. (50) ile ifade edilen maliyet fonksiyonunu minimize eden kontrol sinyali (51) denkleminde verilmiştir.

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= - \left(r^{-1} B_c^T (A^T - Y B_c r^{-1} B_c^T)^{-1} W \right) \alpha_d(t) - (r^{-1} B_c^T Y) \beta(t) \\ &= F \alpha_d(t) - G \beta(t) \end{aligned} \quad (51)$$

(51) denkleminde görülen Y matrisi aşağıdaki Riccati denkleminin çözümünden elde edilir.

$$-YA - A^T Y - W + Y B_c r^{-1} B_c^T Y = 0_{M \times M} \quad (52)$$

$\alpha_d(t)$ ile betimlenen referans dinamik ise aşağıda verilen sistemin durumlarından elde edilmektedir:

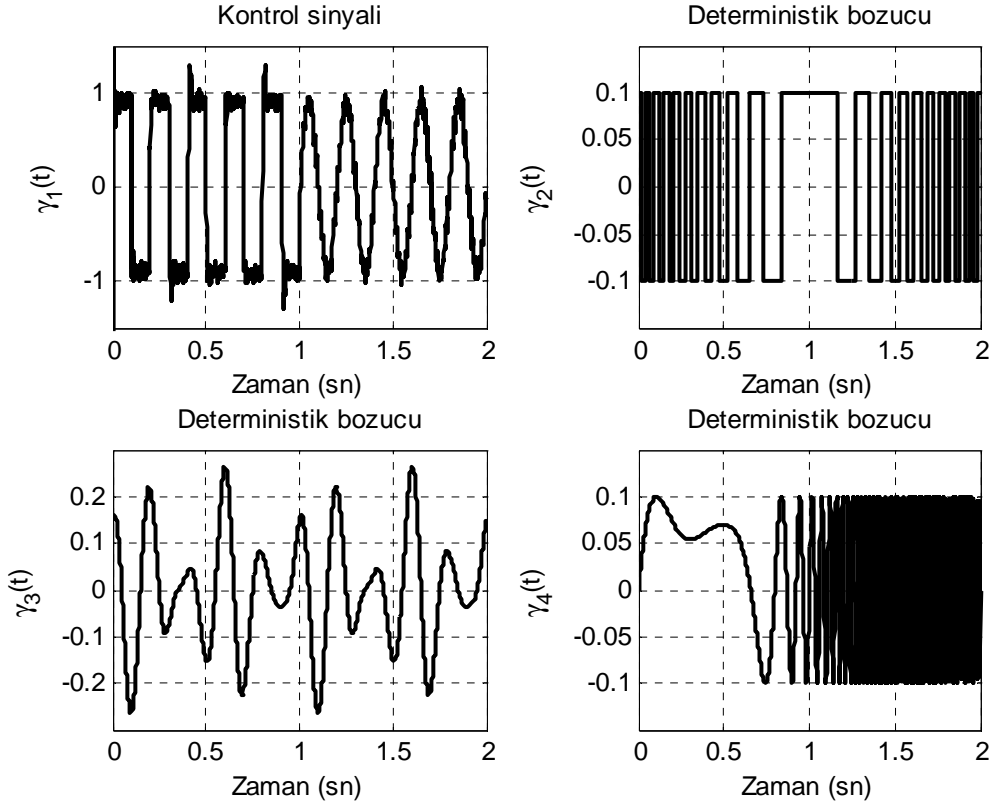
$$\dot{\alpha}_d(t) = c_d^2(t) (A \alpha_d(t) + B_c R(t)) \quad (53a)$$

$$R(t) = \begin{cases} \text{sign}(\sin(10\pi t)) & 0 \leq t \leq 1 \text{ sn} \\ \sin(10\pi t) & 1 \leq t \leq T = 2 \text{ sn} \end{cases} \quad (53b)$$

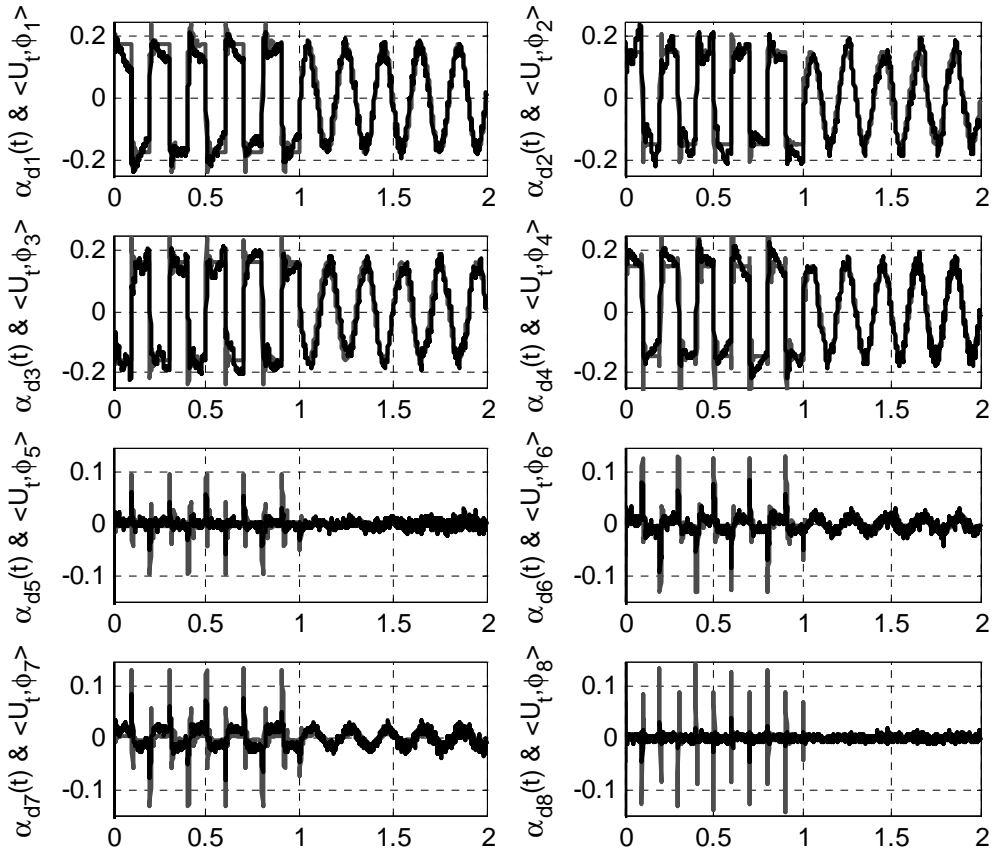
Yukarıdaki sistem için $c_d(t) = 1 + \sin(4\pi t)/2$ ile verilen ve zamanla değişen bir ısı yayılma katsayısı seçilmiştir. (25) ve (26) ile verilen ifadelerle bakılırsa ısı yayılma katsayısının A ve B matrislerini çarpımsal olarak etkilediği görülecektir. Kontrolörün tasarımında $W = 100I_{M \times M}$ ve $r = 1$ seçilmiş ve bazı ön testler sonucunda gözleyici kazancı $K = 1$ olarak belirlenmiştir. Bu seçimlerle aşağıdaki F ve G vektörleri elde edilmiştir.

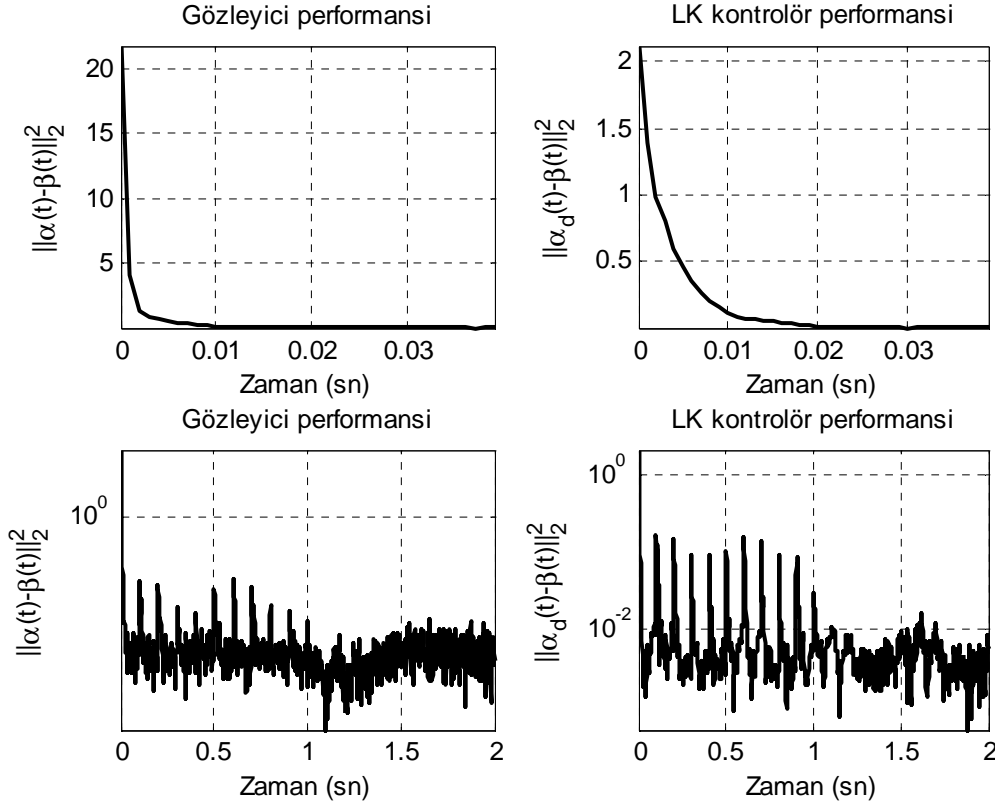
$$\begin{aligned} F &= [5.2193 \quad 4.5390 \quad -4.8428 \quad 4.4249 \quad -0.1086 \quad 0.1267 \quad 0.0889 \quad -0.0357] \\ G &= [4.3006 \quad 3.2362 \quad -4.7691 \quad 2.4971 \quad -5.3626 \quad -8.4963 \quad -7.8925 \quad 6.4039] \end{aligned} \quad (54)$$

Prosesin simülasyonu Matlab/Simulink® ortamında gömülü olarak gerçekleştirilmiş, ve iki büyüklüğün davranışı incelenmiştir. Bunlardan ilki $\sum_{k=1}^M (\langle U_t, \phi_k \rangle_{\Omega_d} - \beta_k(t))^2 = \|\sigma(t)\|_2^2$ ifadesi ile verilmekte ve bu büyüklük gözleyicinin performansı ölçülmektedir. Görüldüğü üzere sistem davranışının (U_t) mevcut baz üzerine izdüşümü hesaplanmakta ve t anında $\alpha_k(t)$ değişkeninin muadili elde edilmektedir. Böylelikle hesaplanan büyüklük, gözleyici durum vektörü ile prosesin indirgenmiş durum vektörü arasındaki farkın 2-normuna karşı düşmekte ve bu büyüklüğün olabildiğince küçük değerlerde seyretmesi istenmektedir. Böylelikle gözleyicinin, prosese ait indirgenmiş bir durum vektörünü hassas biçimde ortaya çıkardığı sonucuna varılabilecektir. İncelenen diğer büyüklük ise $\|\alpha_d(t) - \beta(t)\|_2^2$ ile verilmekte ve kontrolörün performansını nitelemektedir. Açık ki bu değer in sıfıra yakın olması istenen durum izleme sonucuna erişildiği anlamına gelecektir. Şekil 8'de prosesi uyaran sinyaller gösterilmiştir. Şeklin sağ sütunundaki ve alt satırındaki sinyaller (55)-(57) ile verilen deterministik bozucu sinyallere denk düşmekte, sol üstte görülen sinyal ise istenen davranışı elde etmek üzere kontrolör tarafından üretilen kontrol sinyalini göstermektedir. Gözleyici tarafından okunan sinyalleri bozan ve $n_1(t)$, $n_2(t)$, $n_3(t)$ ve $n_4(t)$ ile gösterilen gürültü sinyalleri 0.002 değerinde güç değerine sahip olup gözleyicinin gürültülü koşullar altında durum bilgisini çıkarsayabilme yeteneğini sınamayı mümkün kılar.



Şekil 8: KDD prosesi uyarın sınır uyarıları

Şekil 9: İstenen durumların ($\alpha_{d_i}(t)$) ve eşdeğer durumların ($\langle U_i, \phi_k \rangle_{\Omega_d}$) zamanla gelişimi



Şekil 10: Eşdeğer proses durumlarının ediniminde gözleyicinin başarımı ve geribeslemeli kontrolde kontrolörün başarımı

$$\gamma_2(t) = 0.1 \text{sign}(\cos(20\pi t(2-t))) \quad (55)$$

$$\gamma_3(t) = 0.15((1 + 0.8\sin(4\pi t))\cos(10\pi t) + 0.05\sin(20\pi t)) \quad (56)$$

$$\gamma_4(t) = 0.1(\sin(12\pi t(0.5-t+t^3))) \quad (57)$$

Şekil 9’da (53a) denkleminde verilen istenen model durumlarının (53b)’de verilen referans sinyaline göre gösterdikleri gelişim ve KDD prosesin eşdeğer durumlarının zamanla gelişimi görülmektedir. Her bir altşekilde görüldüğü üzere baskın kiplerde izleme daha belirgin şekilde iyi iken kip indisi arttıkça kip genliği azalmakta ve durum izleme performansı da düşmektedir. Bu, UOA algoritmasının ve tartışılan modelleme yönteminin işleyiş felsefesine göre hem beklenen hem de kabul edilebilir ölçüde iyi bir sonuçtur. Şekil 10’da ise gözleyici ve kontrolör performansını görsel hale getiren norm ifadelerinin zamanla değişimi gösterilmiştir. Sol sütunda gözleyici performansına, sağ sütunda ise kontrolör performansına dair veriler sunulmuştur. Üst satırda ilk 40 milisaniyelik zaman aralığında gelişen geçici rejimin yakınsaklığı göze çarpmakta, alt satırda ise logaritmik düzey ekseninde çizilen bu büyüklüklerin çok küçük değerlerde ve zamanla sınırlı bir gelişim göstermeleri dikkat çekmektedir. Her iki sonucun da istenen sonuçlar olduğu, kontrol sisteminin beklenen biçimde çalıştığı bu sonuçlarla gösterilmiş olmaktadır.

SONUÇLAR

Bu çalışmada iki boyutlu ısı denkleminin değişken sınır kazançları ile UOA yöntemine dayanarak indirgenmiş Galerkin modeli elde edilmiş, bu model kullanılarak bir gözleyici geliştirilmiş, gözleyicinin Temel Varsayım altında sonlu boyutlu gözleyici ile ilişkileri gösterilmiş ve lineer kuadratik optimal kontrol tekniği ile bir kontrolör tasarlanmış ve bu kontrolör sonsuz boyutlu sistem üzerinde denenmiştir. Elde edilen bulgular tüm modelleme ve tasarım çalışmasının uyum içerisinde olduğunu ve başarılı sonuçlar ürettiğini ortaya koymuştur. UOA algoritmasının kipsel özelliklerle ilişkisinin incelenmesinde KDD prosesin lineer olmasından faydalanılmış, kip sayısının seçimi ve elde edilen indirgenmiş modelin yapısal özelliklerinin incelenmesi bu sayede mümkün olmuştur. Kip sayısı az iken elde edilen modelin kararsız olması ya da kararlı olsa bile model performansının düşük olması, kip sayısı artırıldığında model karmaşıklığının artması ve nümerik çözücü hassasiyetinin artırılması ihtiyacı UOA algoritmasına dayalı indirgenmiş modelleme

çalışmalarında tasarımcıya kalmış bir seçimin yapılmasını zorunlu kılar.

Bu çalışmada Temel Varsayıma dayanarak $u(x, y, t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \Phi_i(x, y)$ ile ifade edilen indirgenmiş çözümün gerçek çözüme eşit kabul edilmesi gerek modelleme çalışmasında gerekse gözleyici ve kontrolör tasarımı aşamalarında son derece önemli bir rol oynamıştır. Unutulmamalıdır ki KDD çözümüne ait eldeki nümerik verilerin tutarlı olması, yani çözümün kompozisyonunda enerji katkıları logaritmik bir sıralama gösteren kiplerin varlığı bu varsayımın sağlandığı anlamına gelir.

Yazarın bu konudaki ileriye dönük çalışmaları doğrusal olmayan 2D KDD'li sistemlerin indirgenmiş modellerinin elde edilmesini amaçlamaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Rowley, C.W., "Model reduction for fluids, using balanced proper orthogonal decomposition," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 15 (3), pp.997-1013, 2005.
- [2] Caraballo, E., Malone, J., Samimy, M., ve DeBonis, J., "A Study of Subsonic Cavity Flows: Low Dimensional Modeling," AIAA 2004-2124, June 2004.
- [3] Rowley, C.W., Colonius, T., Murray, R.M., "Model reduction for compressible flows using POD and Galerkin projection," *Physica D-Nonlinear Phenomena*, 189, (1-2), pp.115-129, 2004.
- [4] Efe, M.Ö. ve Özbay, H., "Low dimensional modeling and Dirichlet boundary controller design for Burgers equation," *International Journal of Control*, 77, 10, pp.895-906, 2004.
- [5] Efe, M.Ö. ve Özbay, H., "Proper orthogonal decomposition for reduced order modeling: 2D heat flow," Proc. of the IEEE Int. Conf. on Control Applications (CCA'2003), Istanbul, Turkey, June 23-25, pp.1273-1278, 2003.
- [6] Atwell, J.A. ve King, B.B., "Proper orthogonal decomposition for reduced basis feedback controllers for parabolic equations," *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 33, pp.1-19, 2001.
- [7] Ly, H.V. ve Tran, H.T., "Modeling and control of physical processes using proper orthogonal decomposition," *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 33, pp.223-236, 2001.
- [8] Singh S.N., Myatt J.H., Addington G.A., Banda S. and Hall, J.K., "Optimal Feedback Control of Vortex Shedding Using Proper Orthogonal Decomposition Models," *Trans. of the ASME: J. of Fluids Eng.*, 123, pp.612-618, 2001.
- [9] Boškovic, D.M., Krstic, M. ve Liu, W., "Boundary Control of an Unstable Heat Equation via Measurement of Domain-Averaged Temperature," *IEEE Trans. on Automatic Control*, v.46, no:12, pp.2022-2028, 2001.
- [10] Ravindran, S.S., "A reduced order approach for optimal control of fluids using proper orthogonal decomposition," *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, 34, pp.425-488, 2000.
- [11] Gügercin, S. ve Antoulas, A.C., "A comparative study of 7 model reduction algorithms," Proc. of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, December 2000.
- [12] Atwell, J.A. ve King, B.B., "Computational aspects of reduced basis feedback controllers for spatially distributed systems," Proc. of the 38th Conf. on Decision and Control, pp. 4301-4306, Phoenix, Arizona, U.S.A. 1999.
- [13] Mizel, V.J. ve Seidman T.I., "An Abstract Bang-bang Principle and Time-optimal Boundary Control of the Heat Equation," *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35, 4, pp.1204-1216, 1997.
- [14] Rösch A., "Identification of Nonlinear Heat Transfer Laws by Optimal Control," *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 15, 3-4, pp.417- 434, 1994.

-
- [15] Farlow, S.J., *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Dover Publications Inc., New York, pp.317-322, 1993.
- [16] Sirovich, L., "Turbulence and the dynamics of coherent structures," *Quarterly of Applied Mathematics*, XLV, no. 3, pp. 561-590, 1987.
- [17] Lions, J.L., *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Springer, Berlin, 1971.
- [18] Lumley, J., "The structure of inhomogeneous turbulent flows," *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, Nauca, Moscow, pp.166-176, 1967.